

UNIVERSITÉ PARIS-SUD

MÉMOIRE DE MASTER 2 – MATHÉMATIQUES

PARCOURS ANALYSE, ARITHMÉTIQUE, GÉOMÉTRIE

---

# Le problème isopérimétrique pour les métriques périodiques

---

*Auteur :*  
Gabriel PALLIER

*Encadré par :*  
Pierre PANSU

Orsay, année universitaire 2015-2016



## Résumé

En 1999, Pansu [Pan99] a étudié le problème isopérimétrique pour les revêtements universels de tores riemanniens. À cette occasion, Pansu a démontré que ces espaces admettent une constante isopérimétrique asymptotique, donné des interprétations de cette constante, et décrit des conséquences pour un problème analogue discret. Nous proposons une relecture de cet article allant des préliminaires aux résultats principaux, à la suite de laquelle nous énonçons une généralisation conjecturale au sujet du problème isopérimétrique asymptotique pour les variétés riemanniennes munies d'actions co-compactes d'un groupe abélien libre ; nous traitons la majoration du profil isopérimétrique dans ce cas général en reprenant la méthode de Pansu.

### *The Isoperimetric Problem for Periodic Metrics*

## Abstract

In 1999, Pansu [Pan99] addressed the isoperimetric problem on universal covers of Riemannian tori. Pansu proved that these spaces admit an asymptotic isoperimetric constant, expressed this constant as well as the asymptotic shape of extremal domains, and deduced similar statements for graphs which apply to the equilibrium shape of crystals. The present work is aimed at explaining that paper, from the background results to the main theorems. A slight generalization, in both settings of Riemannian manifolds and graphs equipped with a geometric action of a free abelian group, is conjectured, and a generalized upper bound on the isoperimetric profile is provided, using again Pansu's method.

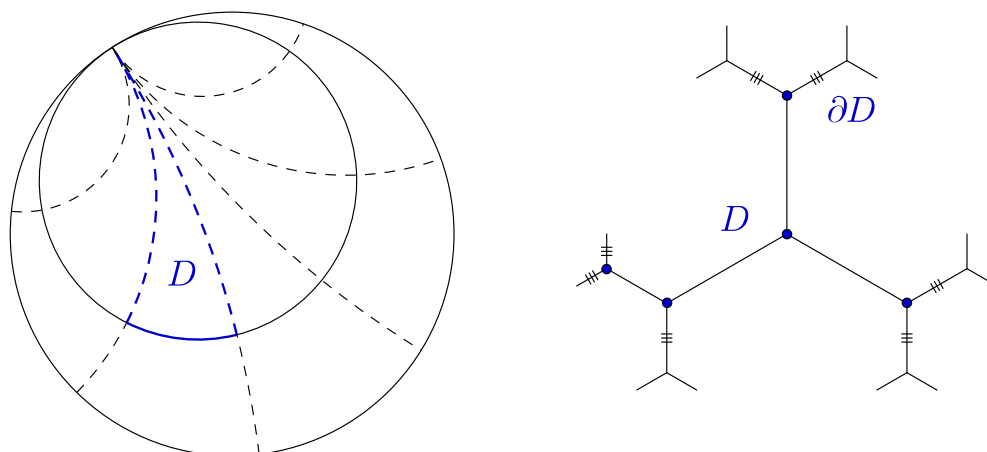


FIGURE 1 – Solution du problème isopérimétrique (a) dans un quotient de  $\mathbb{H}^2$  par un groupe parabolique discret (projection d’un horodisque stable) (b) dans l’arbre 3-régulier (où toute partie connexe convient).

## Introduction

Dans son sens le plus général, le problème isopérimétrique consiste à minimiser le périmètre nécessaire pour enfermer un volume donné.

Cette question figure parmi les plus anciennes relevant de l’optimisation en mathématiques, et a connu d’innombrables développements très au-delà. Nous renonçons à les résumer ici, mais renvoyons à [Oss78] pour un panorama concernant l’inégalité isopérimétrique et ses prolongements en géométrie différentielle.

Le problème est naturellement bien posé dans les variétés riemanniennes, mais aussi dans les graphes, où l’on peut définir le volume d’une partie finie en comptant ses sommets, et son périmètre en comptant les arêtes qu’il faudrait supprimer pour la détacher du reste du graphe (nous préciserons cette définition plus loin), cf. figure 1.

**Position du problème, résultats** Dans un espace euclidien, il est connu que les solutions du problème isopérimétrique coïncident avec les boules euclidiennes<sup>1</sup>. En revanche, dès que la métrique est perturbée périodiquement, les solutions du problème isopérimétrique cessent de ressembler aux boules géodésiques, même à grande échelle, comme on peut le constater sur la figure 2.

Ce mémoire s’inscrit dans la tentative de comprendre ce phénomène. Plus précisément, il s’agit de décrire la forme limite des solutions du problème isopérimétrique à grande échelle des métriques invariantes selon une action géométrique, sur une variété riemannienne ou bien sur un graphe. On se concentrera particulièrement sur le cas où le groupe agissant est abélien et

1. On pourra consulter l’annexe A pour une preuve de ce fait, ainsi que des autres assertions non démontrées dans le texte de cette introduction.

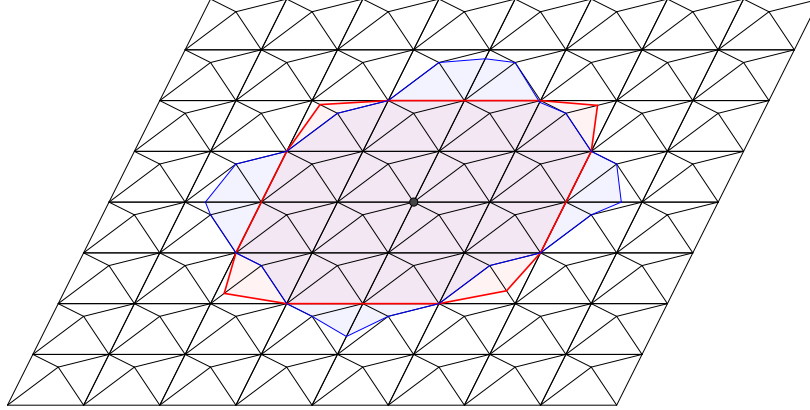


FIGURE 2 – Solution du problème isopérimétrique (en rouge) comparée à une boule géodésique (en bleu), pour une métrique  $\mathbb{Z}^2$ -périodique de  $\mathbb{R}^2$  dont la géométrie à grande échelle est proche d’une distance  $L^1$ , dite de Manhattan.

libre, ce qui concerne les revêtements universels des tores riemanniens, par exemple. Comme le suggère la figure 2, l’homogénéisation de la métrique à grande échelle (formalisée par la notion de cône asymptotique) n’est pas entièrement pertinente pour comprendre le problème isopérimétrique asymptotique, du moins si l’on s’intéresse à des informations aussi précises que la forme des domaines extrémaux. Autrement dit : *dans un milieu périodique, les grandes boules et les grandes bulles ne se ressemblent pas*. A partir de ce constat, l’objectif est de comprendre l’espace limite (nécessairement différent du cône asymptotique) où a lieu le problème isopérimétrique asymptotique. Les principaux résultats dans ce sens, que nous énonçons informellement ici pour un tore riemannien, sont les suivants :

**Théorème I** ([Pan99, th 1, th 3], ici 4.4, 4.6, 4.45, 4.48). *Il existe une constante isopérimétrique asymptotique pour le problème isopérimétrique sur le revêtement universel  $\tilde{T}$ . Cette constante peut être arbitrairement petite ; en dimension 2 elle est majorée par la constante des métriques plates (4.47), et en dimension  $n \geq 3$  elle peut être arbitrairement grande [BI98, p.4].*

**Théorème II** ([Pan99, prop 31], ici 4.7). *Il existe une forme limite des solutions du problème isopérimétrique sur  $\tilde{T}$ , elle est donnée par la boule unité d’une norme, qui est (au choix) :*

1. *la norme sur l’espace vectoriel sous-jacent à  $\tilde{T}$  identifié à  $H_1(T, \mathbb{R})$  qui est duale de la norme  $L^1$  sur  $H^1(T, \mathbb{R})$ , ou bien*
2. *la norme  $L^\infty$  sur  $H^{n-1}(T, \mathbb{R})$  (assimilé à l’espace précédent via la dualité de Poincaré).*

Des résultats similaires pour les graphes sont également obtenus. On a ainsi rapproché les solutions du problème isopérimétrique de boules, pour une distance indirectement liée à la métrique de départ. On conjecture le même résultat pour une action co-compacte générale

---

2. Ici, à titre de comparaison, la norme stable, qui est celle qui donne la forme des grandes boules géodésiques, est la norme sur  $H_1(T, \mathbb{R})$  duale de la norme  $L^\infty$  sur  $H^1(T, \mathbb{R})$ , cf. prop 3.31.

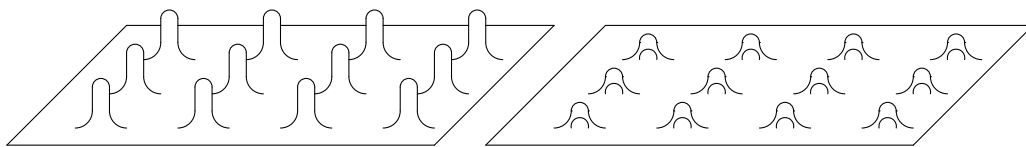


FIGURE 3 – A gauche, cas d’application des théorèmes de Pansu [Pan99] sur l’isopérimétrie des métriques périodiques ; à droite, situation plus générale d’une action géométrique de  $\mathbb{Z}^2$ .

d’un groupe abélien libre (en remplaçant dans l’énoncé homologie et cohomologie du tore par homologie et cohomologie à coefficients réels du groupe  $\Gamma$ ).

Signalons cependant que hors du cadre abélien, il n’est pas raisonnable d’espérer encore que les solutions du problème isopérimétrique s’apparentent à des boules (même pour une distance modifiée). Par exemple, dans un graphe de Cayley du groupe  $G = \text{Sol}_3(\mathbb{Z})$ , les boules pour n’importe quelle distance invariante à gauche ont une croissance exponentielle ; toutefois  $G$  étant résoluble, donc moyennable, il admet des suites de Følner à droite qui sont plus efficaces du point de vue isopérimétrique.

**Contenu** Ce mémoire est constitué de cinq parties. La première, à vocation introductive et de traitement relativement élémentaire, énonce le problème isopérimétrique anisotrope et donne une solution dans le cas homogène (décrite par Brunn en 1887), qui se retrouvera plus loin être le cadre du problème isopérimétrique limite pour les métriques périodiques. Dans la seconde partie, nous mettons en place des éléments du formalisme de la théorie homologique de l’intégration, dont les objets sont les courants. On se limitera à quelques fragments de cette théorie classique, qui est traitée en détail dans l’ouvrage de Federer [Fed69], notre référence constante pour la théorie géométrique de la mesure. La troisième partie est consacrée aux structures normées sur les espaces d’homologie et de cohomologie des variétés munies de densités. On y traite en particulier de la norme stable, et de l’homogénéisation de certains revêtements riemanniens. Des isométries entre espaces normés de (co)-homologies sont établies ; celles-ci joueront un rôle pour l’interprétation des constantes isopérimétriques. La partie 4 est centrale ; on y énonce et redémontre les théorèmes de Pansu [Pan99] sur le problème isopérimétrique des métriques périodiques. Une version un peu plus générale (portant sur les actions co-compactes de  $\mathbb{Z}^n$ ) de la majoration du profil isopérimétrique est conjecturée. Dans la cinquième et dernière partie, on discute d’un analogue discret.

**Remerciements** Ce mémoire doit beaucoup à Pierre Pansu, qui a suivi attentivement mon travail et n’a pas ménagé son temps pour répondre à mes questions. Je remercie également Elisabeth Kneller, de la bibliothèque Jacques Hadamard à Orsay et Laurent Roye, de la bibliothèque scientifique de l’ENS, qui m’ont permis l’accès à la thèse plus que centenaire d’Hermann Brunn.

# Table des matières

Résumé . . . . .	ii
<b>Introduction</b>	<b>iii</b>
Position du problème . . . . .	iii
Contenu . . . . .	v
<b>Table des matières</b>	<b>vi</b>
<b>1 Le problème isopérimétrique anisotrope</b>	<b>9</b>
1.1 Intégrand et périmètre . . . . .	9
1.1.1 Densités, intégrands et mesure des hypersurfaces . . . . .	9
1.1.2 En présence d'un élément de volume . . . . .	11
1.1.3 En présence d'une structure euclidienne . . . . .	12
1.1.4 En présence d'une norme : l'intégrand de Poincaré . . . . .	13
1.1.5 Intégrands paramétriques, intégrands sur les variétés. . . . .	15
1.1.6 Volume finslérien, volume de Liouville . . . . .	16
1.2 Inégalité isopérimétrique anisotrope . . . . .	16
1.2.1 Généralités . . . . .	16
1.2.2 Inégalités isopérimétriques et inégalités fonctionnelles . . . . .	17
1.2.3 Evaluation de la constante de Sobolev . . . . .	19
1.2.4 Cas d'égalité dans l'inégalité isopérimétrique de Brunn . . . . .	22
<b>2 Vocabulaire des courants</b>	<b>24</b>
2.1 Courants . . . . .	24
2.1.1 Définitions, opérations sur les courants . . . . .	24
2.1.2 Exemple : courants étalés . . . . .	26
2.1.3 Exemple : courants d'intégration sur les sous-variétés . . . . .	27
2.2 Masse et Norme $\flat$ . . . . .	27
2.2.1 Masse. Courants normaux. . . . .	27
2.2.2 Topologie $\flat$ . . . . .	30
2.3 Intégralité . . . . .	31
2.3.1 Définitions . . . . .	31
2.3.2 Compacité et approximation . . . . .	32
2.4 Homologie des courants . . . . .	33
2.4.1 Régularisation . . . . .	34
2.4.2 Homologies des complexes de chaînes $\flat$ réelles et entières . . . . .	35
<b>3 Normes sur les groupes d'homologie</b>	<b>37</b>
3.1 La norme stable $\ \cdot\ _{\mathbb{R}}$ . . . . .	37
3.1.1 Définition . . . . .	37
3.1.2 Norme stable et normes géométriques . . . . .	38
3.1.3 Homogénéisation du revêtement maximal abélien . . . . .	40
3.1.4 Norme stable et volume asymptotique . . . . .	43
3.2 Les normes $ \cdot _p$ sur les groupes de cohomologie . . . . .	44
3.3 Isométries . . . . .	45

3.3.1	Isométries et dualité entre espaces de (co-)homologie . . . . .	45
3.3.2	Calibration. Conséquences . . . . .	46
3.4	Le tore $T_\infty$ . . . . .	48
3.4.1	Définition topologique . . . . .	48
3.4.2	Structure finslérienne homogène . . . . .	48
<b>4</b>	<b>Homogénéisation du problème isopérimétrique asymptotique</b>	<b>50</b>
4.1	Problème isopérimétrique des revêtements universels de tores. . . . .	50
4.1.1	Définitions préliminaires . . . . .	50
4.1.2	Enoncé des théorèmes . . . . .	50
4.2	Généralisation : actions co-compactes des groupes abéliens libres . . . . .	51
4.2.1	Contexte . . . . .	51
4.2.2	Conjectures . . . . .	52
4.3	Majoration du profil isopérimétrique . . . . .	53
4.4	Une propriété de semi-continuité . . . . .	55
4.4.1	Courants $k$ -rationnels . . . . .	56
4.4.2	Cas de la limite rationnelle . . . . .	56
4.4.3	Approximation par des courants $k$ -rationnels . . . . .	59
4.4.4	Fin de la preuve . . . . .	59
4.5	Minoration du profil isopérimétrique . . . . .	60
4.5.1	Réduction du support . . . . .	60
4.5.2	Minoration du profil isopérimétrique . . . . .	61
4.6	Convergence des domaines extrémaux . . . . .	62
4.7	Discussion sur la constante isopérimétrique asymptotique . . . . .	62
4.7.1	Majoration de la constante isopérimétrique . . . . .	63
4.7.2	La dimension deux . . . . .	63
4.7.3	Grande constante isopérimétrique . . . . .	64
4.8	Vers une preuve dans le cas général . . . . .	66
4.8.1	Inégalité isopérimétrique relative . . . . .	66
4.8.2	Transport de courants par discrétisation entre $\Gamma$ -variétés . . . . .	67
4.8.3	Semi-continuité . . . . .	69
<b>5</b>	<b>Version discrète</b>	<b>74</b>
5.1	Le problème isopérimétrique des $\Gamma$ -graphes . . . . .	74
5.1.1	Energie de liaison et périmètre . . . . .	74
5.1.2	Graphe quotient . . . . .	76
5.1.3	Cohomologie . . . . .	76
5.2	Profil isopérimétrique . . . . .	77
5.2.1	Conjecture . . . . .	77
5.2.2	Majoration du profil isopérimétrique des $\mathbb{Z}^n$ -graphes . . . . .	77
5.3	Du problème riemannien au problème discret . . . . .	78
5.4	Solides covalents et cristallographie . . . . .	80
5.4.1	Norme cristalline et cristaux dans un milieu périodique . . . . .	80
5.4.2	Un exemple . . . . .	81

<b>A</b>	<b>Généralités sur l'inégalité isopérimétrique</b>	<b>82</b>
A.1	Espace euclidien . . . . .	82
A.2	Espace hyperbolique . . . . .	83
A.3	Groupes nilpotents . . . . .	84
<b>B</b>	<b>Une formule de coaire anisotrope pour les ensembles rectifiables</b>	<b>87</b>
<b>C</b>	<b>Notions alternatives de périmètre</b>	<b>90</b>
C.1	Incompatibilité avec les mesures de Hausdorff . . . . .	90
C.2	Le contenu extérieur de Minkowski . . . . .	90
<b>D</b>	<b>L'argument de Moser</b>	<b>94</b>
D.1	Argument de Moser . . . . .	94
D.2	Une version semi-locale du théorème de Darboux . . . . .	94
<b>E</b>	<b>Inégalité systolique de Loewner</b>	<b>95</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>95</b>
	<b>Index</b>	<b>98</b>



# 1 Le problème isopérimétrique anisotrope

Cette première partie est consacrée à une version anisotrope du problème isopérimétrique. Elle est motivée par le fait, que nous précisons en 4, que le problème isopérimétrique d'une métrique périodique selon un réseau de  $\mathbb{R}^n$  est asymptotiquement équivalent au problème analogue posé dans un espace affine de dimension finie muni d'une norme non isotrope.

Il est dès lors nécessaire de formuler le problème isopérimétrique dans de tels espaces, ce qui fait l'objet de 1.1; la formulation concerne également les variétés finslériennes. La solution du problème anisotrope dans les espaces vectoriels normés, qui remonte à la thèse de Brunn [Bru87] en 1887, sera atteinte en 1.2 au moyen du transport de masse de Knothe. Nous utiliserons également un échange classique d'inégalités entre la géométrie et l'analyse, ici formulé dans le cadre anisotrope : sous des hypothèses adéquates, la constante isopérimétrique est égale à la constante de Sobolev.

Nous reléguons l'usage des courants, et la formulation du problème isopérimétrique en termes de courants entiers, à la section 2.

## 1.1 Intégrand et périmètre

Dans l'espace euclidien ou dans les variétés riemanniennes, le problème isopérimétrique est immédiatement posé sans ambiguïté : le volume du bord d'un domaine n'est pas une notion équivoque, à partir du moment où celui-ci est supposé suffisamment régulier. Par exemple :

1. Si le bord est  $C^1$ , on y dispose d'une forme volume qui est celle de la métrique riemannienne induite, prête à être intégrée.
2. Si le bord est moins régulier, disons rectifiable, une mesure de Hausdorff en codimension 1 relativement à la métrique ambiante suffit encore à le mesurer.

Lorsque le problème est formulé dans une variété différentielle orientée, les volumes peuvent encore être mesurés au moyen d'une forme en degré maximal. Mais il faut également spécifier la manière de mesurer les volumes de bords, indépendamment de leur régularité. Nous verrons que différentes structures sur l'espace ou la variété permettent de mesurer les hypersurfaces. C'est le cas en particulier des normes (ou des structures finslériennes).

### 1.1.1 Densités, intégrands et mesure des hypersurfaces

On commence par introduire la notion de  $k$ -densité. La terminologie est issue de [CdL16].

**Définition 1.1.** Soit  $R$  un espace vectoriel réel orienté de dimension  $n$ . Une  $k$ -densité sur  $R$  est une fonction continue, positive, positivement homogène sur les  $k$ -vecteurs simples de  $R$ . En particulier, on appellera intégrand une  $n - 1$  densité.

De plus, on dit qu'une densité est symétrique si elle est absolument homogène, i.e. si  $F(\xi) = F(-\xi)$  pour tout  $k$ -vecteur simple  $\xi$ .

*Exemple 1.2.* Toute  $n$ -forme  $\omega$  définit une  $n$ -densité symétrique par  $\xi \mapsto |\omega(\xi)|$ . Réciproquement, à toute densité symétrique en degré maximal correspond deux  $n$ -formes.

*Exemple 1.3.* En degré  $n - 1$  tous les multivecteurs sont simples et une semi-norme sur  $\Lambda_{n-1}R$  constitue un intégrand. Par exemple, si  $\{\eta_i\}_{i \in I}$  est une famille finie de  $n - 1$ -covecteurs, alors

$$F(\xi) := \sup \{ |\langle \xi, \eta_i \rangle| : i \in I \}$$

est un intégrand, dit polyédral.

*Exemple 1.4* (densité euclidienne). Si  $R$  est euclidien, l'isomorphisme  $\beta : \Lambda_1 R \simeq \Lambda^1 R$  s'étend en un isomorphisme d'algèbres graduées  $\Lambda_* \beta : \Lambda_* R \simeq \Lambda^* R$  et donne en particulier  $\Lambda_k \beta : \Lambda_k R \simeq \Lambda^k R$  qui est une structure euclidienne sur  $\Lambda_k R$ . La restriction aux  $k$ -vecteurs simples de la norme euclidienne de  $\Lambda_k R$  est une  $k$ -densité symétrique, que nous noterons  $F_k$  et appellerons densité euclidienne. Explicitement,  $F_k$  s'exprime à l'aide d'un déterminant :

$$F_k(e_1 \wedge \dots \wedge e_k)^2 = \det \langle e_i, e_j \rangle. \quad (1.5)$$

A chaque densité  $F$  en degré  $k$  est associée une forme d'aire sur les sous-variétés orientées de dimension  $k$  :

**Définition 1.6.** Soit  $\mathcal{H} \subset R$  une sous-variété  $\mathcal{C}^1$  à bord, orientée de dimension  $k$ . Il existe une unique  $k$ -forme  $\sigma_F$  sur  $\mathcal{H}$  telle que pour tout paramétrage local  $\varphi : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathcal{H}$  préservant l'orientation, et pour tout  $x \in \mathbb{R}^k$

$$(\varphi^* \sigma_F)_x = F \left[ \Lambda_k d\varphi_x \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x_k} \right) \right] dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k. \quad (1.7)$$

$\sigma_F$  est dite mesure d'aire sur  $\mathcal{H}$  associée à  $F$ .

Si  $F$  est symétrique, il n'y a pas besoin de requérir que  $\varphi$  préserve l'orientation dans la définition précédente. Dans le cas euclidien, on retrouve la mesure de volume pour la métrique riemannienne induite sur  $\mathcal{H}$ . En pratique, l'intégrale de  $f \in \mathcal{C}_c(\mathcal{H})$  sur  $\mathcal{H}$  pour  $\sigma_F$  se calcule au moyen d'une partition de l'unité  $(U_i, \chi_i)$  sur le support de  $f$  :

$$\int_{\mathcal{H}} f \sigma_F := \sum_i \int_{U_i} (f \chi_i) \sigma_F,$$

où les  $U_i$  sont des ouverts paramétrables,  $\chi_i \in \mathcal{C}_c(U_i)$  et  $\sum_i \chi_i = 1$  sur le support de  $f$ . On désignera par  $\mu_F$  la mesure borélienne localement finie sur  $\mathcal{H}$  associée à cette intégrale. Ceci permet de définir le périmètre relativement à un intégrand :

**Définition 1.8.** Supposons  $R$  orienté et muni d'un intégrand  $F$ . Soit  $D \subset R$  un domaine compact à bord  $\mathcal{C}^1$  par morceaux, c'est-à-dire union finie d'hypersurfaces compactes à bord  $\mathcal{H}_i$ , telles que les  $\mathcal{H}_i \setminus \partial \mathcal{H}_i$  sont disjointes. Si  $D$  possède l'orientation induite par celle de  $R$ , les sous-variétés  $\mathcal{H}_i$  sont munies de l'orientation de bord, et par là de la mesure d'aire  $\sigma_{F,i}$  définie en (1.6). On définit alors le périmètre de  $D$  relativement à  $F$  comme

$$\sum_i \|\mu_{F,i}\| = \sum_i \int_{\mathcal{H}_i} \sigma_{F,i}. \quad (1.9)$$

*Exemple 1.10* (Figure 4). Si  $D$  est un polytope convexe dont les faces sont des  $n-1$ -parallélotopes  $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_s$ , c'est un domaine à bord  $\mathcal{C}^1$  par morceaux. Désignons par  $e_{i,1}, \dots, e_{i,n-1}$  la famille des vecteurs sur lesquels est formée la face  $\mathcal{F}_i$ , orientée positivement pour l'orientation de bord de  $P$ . Alors le périmètre de  $D$  est

$$\sum_{i=1}^s F(e_{i,1} \wedge \dots \wedge e_{i,n-1}).$$

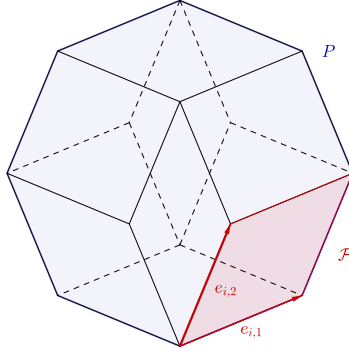


FIGURE 4 – Illustration de l'exemple 1.10

Comme attendu, le périmètre ainsi défini pour un intégrand  $F$  est  $n - 1$ -homogène quand on réalise une homothétie de  $D$ .

*Remarque 1.11.* Notre définition 1.1 pour un intégrand est moins générale, mais compatible avec celle de [Fed69] (qui ne réserve pas l'usage du terme aux densités de degré  $n - 1$ ). Cependant, il faut prendre garde à ce que l'espace de définition des intégrands varie dans la littérature, du fait des isomorphismes  $R^* \simeq \Lambda_{n-1}R$  que nous décrirons en 1.1.2, mais aussi de l'usage de structures euclidiennes qui donnent des isomorphismes de  $R^*$  avec  $R$  lui-même. Ainsi, Taylor [Tay78] définit l'intégrand directement sur la grassmannienne  $\mathcal{G}_{n-1}(R)$ , tandis que Brothers et Morgan [BM94] le définissent sur  $R$ .

### 1.1.2 En présence d'un élément de volume

Commençons par raisonner très élémentairement dans  $R = \mathbf{E}^3$  euclidien, et supposons que nous voulions retrouver l'intégrand  $F_2$  de l'exemple 1.4 correspondant à  $k = 2$ , autrement dit, l'aire du parallélogramme formé sur deux vecteurs  $u$  et  $v$ , mais en oubliant momentanément la norme euclidienne sur le plan  $\mathbb{R}u + \mathbb{R}v$ . Voici une manière de procéder : on choisit  $w$  dans  $\{u, v\}^\perp$ , de norme 1, puis on mesure le volume euclidien du parallélépipède  $\Pi$  formé sur  $u, v, w$ . On a ainsi retrouvé l'intégrand  $F_2$  et donc la mesure d'aire, en utilisant seulement  $F_1$  (qui est la norme euclidienne) et  $F_3$  (qui est la forme volume euclidienne). Le procédé peut être extrait du cadre euclidien, ce qui fera l'objet la proposition 1.15. Nous commençons par introduire la notion duale de 1.1 :

**Définition 1.12.** Soit  $R$  un espace vectoriel réel de dimension  $n$ . Une  $k$ -co-densité est la donnée d'une  $k$ -densité sur  $R^*$ . De manière équivalente, c'est une fonction positive, continue, positivement homogène sur les  $k$ -formes simples de  $R$ .

Toute forme  $\omega \in \Lambda^n R$  non nulle donne lieu à un isomorphisme :

$$\Psi_\omega : \Lambda^{n-k} R \rightarrow (\Lambda^k R)^* = \Lambda_k R$$

$$\alpha \mapsto \left\{ \phi \mapsto \frac{\phi \wedge \alpha}{\omega} \right\}$$

qui envoie  $n - k$ -formes simples sur  $k$ -vecteurs simples.  $\Psi_\omega$  fait correspondre à toute  $k$ -densité  $F$  une  $n - k$  co-densité, que l'on notera  $F_\omega^*$  suivant<sup>3</sup> [CdL16], définie par

$$F_\omega^*(\alpha) = F(\Psi_\omega(\alpha)). \quad (1.14)$$

On dit que  $F_\omega^*$  est la co-densité de  $F$  par rapport à  $\omega$ . En particulier, si  $F$  est un intégrand sur  $R$ , il lui correspond une 1-co-densité  $F_\omega^* : R^* \rightarrow \mathbb{R}_+$ . Dans le cas où  $F$  est une norme, on désignera aussi  $F_\omega^*$  par  $\|\cdot\|_{F,\omega}^*$ ; le sens de cette écriture apparaîtra plus clairement à partir de 1.1.4.

**Proposition 1.15.** *On suppose  $R$  muni d'une  $n$ -forme non nulle  $\omega$  ainsi que d'un intégrand  $F$ . Soit  $\mathcal{H}$  une hypersurface à bord orientée. Soit  $\sigma$  une  $n - 1$  forme sur  $\mathcal{H}$  strictement positive. Alors*

$$\sigma_F = F_\omega^*(\alpha)\sigma \quad (1.16)$$

où  $\alpha : \mathcal{H} \rightarrow R^*$  est *uniquement déterminée par les conditions suivantes :*

- (i)  $\alpha$  est transverse, i.e.  $\alpha|_{T\partial D} \equiv 0$
- (ii)  $\sigma \wedge \alpha = \omega$

*En particulier, si  $D$  est un domaine à bord  $\mathcal{C}^1$  par morceaux au sens de 1.8, son périmètre s'exprime sous la forme*

$$\mu_F(\partial D) = \int_{\partial D} F_\omega^*(\alpha)\sigma. \quad (1.17)$$

*Démonstration.* Observons que le membre de droite dans (1.16) ne dépend pas du choix de  $\sigma$  : le fibré conormal de  $\mathcal{H}$  étant de rang 1, multiplier  $\sigma$  ou  $\omega$  par une fonction  $\lambda > 0$  demande en compensation de multiplier  $\alpha$  par  $\lambda^{-1}$  pour satisfaire la condition (ii). D'un autre côté, si  $\omega$  est changée en  $\omega'$  avec  $\omega' = \mu\omega$ ,  $\mu \neq 0$ , alors  $\alpha$  est changée en  $\alpha' = \mu\alpha$  pour satisfaire (ii). Donc  $\Psi_{\omega'}(\alpha') = \mu^{-1}\Psi_\omega(\alpha') = \mu^{-1}\mu\Psi_\omega(\alpha)$ , et  $F_{\omega'}(\alpha') = F_\omega(\alpha)$  : le terme de droite est encore inchangé. Il suffit donc de se donner pour tout  $x$  dans  $\mathcal{H}$  une application  $\varphi : \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \rightarrow R$  qui est une carte locale de l'inclusion  $\mathcal{H} \subset R$ , autrement dit :  $\varphi$  est de différentielle surjective en 0, envoie 0 sur  $x$  et est telle que la restriction  $\varphi|_{\mathbb{R}^{n-1}}$  est le paramétrage d'un voisinage de  $x$  dans  $\mathcal{H}$ . On pose alors  $\sigma = \varphi_* dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1}$  et  $\omega = \varphi_*(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n)_0$ . La condition (i) impose alors que  $\alpha_x = (\varphi_* dx_n)_x$ , et  $\Psi_\omega \alpha_x = \varphi_*(\partial/\partial x_1 \wedge \dots \wedge \partial/\partial x_{n-1})$ , donc  $F_\omega^*(\alpha_x) = F(\Lambda_{n-1} d\varphi_0(\partial/\partial x_1 \wedge \dots \wedge \partial/\partial x_{n-1}))$ . On s'est ainsi ramené à la définition 1.6 de  $\sigma_F$ .  $\square$

### 1.1.3 En présence d'une structure euclidienne

On garde à l'esprit le problème anisotrope, mais on s'autorise ici à utiliser une structure euclidienne auxiliaire. Ceci permet d'attribuer une normale extérieure aux bords des domaines

---

3. La construction de [CdL16] est plus explicite : on se donne  $k$  formes linéairement indépendantes  $v_1^*, \dots, v_k^*$  sur  $R$ , alors

$$F_\omega^*(v_1^* \wedge \dots \wedge v_k^*) := \frac{F(w_1 \wedge \dots \wedge w_k)}{\omega(v_1 \wedge \dots \wedge v_k \wedge w_1 \wedge \dots \wedge w_{n-k})} \quad (1.13)$$

où  $v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_{n-k}$  est la base duale de  $v_1^*, \dots, v_k^*, w_1^*, \dots, w_{n-k}^*$  pour un choix de  $w_i^*$  tel que

$$v_1^*, \dots, v_k^*, w_1^*, \dots, w_{n-k}^*$$

est une base de  $R^*$ . Le résultat ne dépend pas du choix des  $w_i^*$ .

$\mathcal{C}^1$ .

**Définition 1.18.** Soit  $R$  un espace vectoriel,  $\omega$  une forme volume et  $F$  un intégrand sur  $R$ . Si  $R$  est muni d'une structure euclidienne  $\beta : R \simeq \Lambda^1 R$ , on désigne par  $\pi_{F,\omega} : S_1(R) \rightarrow \mathbb{R}_+$  la fonction telle que

$$\pi_{F,\omega}(n) := F_\omega^*(\beta(n)). \quad (1.19)$$

*Remarque 1.20.* On n'a pas demandé a priori que la forme volume de la structure euclidienne soit  $\omega$ .

Inversement, si l'on se donne une fonction de poids  $\pi : S(R) \rightarrow \mathbb{R}_+$  alors il lui correspond un intégrand  $F$  et une forme volume  $\omega$  sur  $R$  (uniques à une constante multiplicative près) tels que  $\pi = \pi_{F,\omega}$ ; de plus  $F$  est une norme si  $\pi$  est strictement positive, symétrique, et si son extension par homogénéité à  $R$  est convexe.

**Proposition 1.21.** Supposons  $R$  équipé d'une structure euclidienne de forme volume  $\nu$ . Soit  $\sigma$  est la forme volume riemannienne induite sur l'hypersurface à bord orientée  $\mathcal{H}$ , de normale  $n_{\mathcal{H}}$  compatible avec l'orientation, alors

$$\mu_F(\mathcal{H}) = \frac{\omega}{\nu} \int_{\mathcal{H}} \pi_{F,\omega}(n_{\mathcal{H}}) \sigma. \quad (1.22)$$

*Démonstration.* On prend  $\alpha = \frac{\omega}{\nu} \beta(n_{\mathcal{H}})$  dans 1.16. Alors :

- D'une part,  $\alpha$  est transverse; en effet,  $n_{\mathcal{H}}$  est normale à  $\mathcal{H}$  donc pour tout  $x \in \mathcal{H}$ ,  $T_x \mathcal{H} = n_{\mathcal{H}}(x)^\perp = \ker \alpha_x$
- D'autre part, puisque  $\sigma$  est une mesure de volume sur  $\mathcal{H}$  pour la métrique riemannienne induite,  $\sigma \wedge \beta(n_{\mathcal{H}}) = \nu$ . Mais alors

$$\sigma \wedge \alpha = \frac{\omega}{\nu} \sigma \wedge \beta(n_{\mathcal{H}}) = \omega.$$

□

Grâce à la structure euclidienne, la fonction  $\pi$  peut aussi bien être définie sur la grassmannienne des hyperplans orientés; voire sur la grassmannienne des hyperplans si  $\pi(n) = \pi(-n)$  pour tout  $n$ .

*Remarque 1.23.* Dans [FMP10], notre  $\pi$  est désignée par  $\|\cdot\|_*$ . Quand  $F_\omega^*$  est une norme, avec cette notation, la définition (1.19) devient  $\|n\|_* := \|\beta(n)\|_*$ .

### 1.1.4 En présence d'une norme : l'intégrand de Poincaré

Nous allons interpréter ici le périmètre de  $D$  comme une norme d'opérateur de  $\partial D$  vu comme une fonctionnelle sur les  $n - 1$  formes (via l'intégration de celles-ci). Cette définition trouvera son cadre naturel en 2.1.3 dans la théorie des courants. A la différence de ce qui a été fait en 1.1.1, il faut se munir au préalable d'une co-densité en degré  $n - 1$  pour pouvoir mesurer les  $n - 1$  formes. Voici une construction, naturelle étant donnée une forme volume  $\omega$ , partant d'une norme sur  $R$  :

**Définition 1.24.** Soit  $R$  un espace vectoriel normé par  $\|\cdot\|$  et muni d'une forme volume  $\omega$ . On munit  $\Lambda^{n-1}R$  de la norme telle que l'isomorphisme linéaire :

$$\begin{aligned}\Phi_\omega : R &\rightarrow \Lambda^{n-1}R \\ \xi &\mapsto \xi \lrcorner \omega\end{aligned}$$

soit une isométrie. Cette norme sur  $\Lambda^{n-1}R$  est appelée *intégrand de Poincaré* relativement à la norme sur  $R$ .

Attention, la terminologie est imprécise puisque l'intégrand de Poincaré est en fait un intégrand sur  $R^*$ . Si  $F^*$  est l'intégrand de Poincaré de  $R$ , on pose

$$F(\xi) = \sup \{ \langle \xi, \phi \rangle, F^*(\phi) \leq 1 \}. \quad (1.25)$$

Il s'agit là d'un intégrand sur  $R$ .

**Lemme 1.26.** Les applications  $\Psi_\omega$  et  $\Phi_\omega^{-1}$  sont transposées l'une de l'autre.

*Démonstration.* C'est un calcul d'algèbre multilinéaire. Désignons par  $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$  le crochet de dualité  $E \otimes E^* \rightarrow \mathbb{R}$ . Soit  $\omega^* \in \Lambda_n R$  l'unique  $n$ -vecteur tel que  $\langle \omega^*, \omega \rangle = 1$ . Alors pour tout  $(\alpha, \xi) \in R^* \times R$  nous avons

$$\langle \Psi_\omega(\alpha), \Phi_\omega(\xi) \rangle_{\Lambda_{n-1}R} = \langle \omega^*, \alpha \wedge (\xi \lrcorner \omega) \rangle_{\Lambda_n R} = \langle \omega^*, \langle \alpha, \xi \rangle_R \cdot \omega \rangle_{\Lambda_n R} = \langle \alpha, \xi \rangle_R.$$

On peut aussi écrire que  $\Psi_\omega = \Phi_{\omega^*}$ . □

On déduit du lemme que si  $\|\cdot\|_F^*$  désigne la norme sur  $R^*$  duale de  $\|\cdot\|$ , alors  $\|\cdot\|_F^* = \|\cdot\|_F^*$  précisément quand  $F$  est dual de l'intégrand de Poincaré par (1.25). On peut encore l'énoncer sous la forme suivante, c.f. [Pan99] : l'intégrand de Poincaré  $F^*$  et la norme  $\|\cdot\|_F^*$  sur  $R^*$  sont Poincaré-duales, i.e.

$$\|\alpha\|_F^* = \sup \left\{ \frac{\tau \wedge \alpha}{\omega} : F^*(\tau) \leq 1 \right\}. \quad (1.27)$$

La terminologie de normes Poincaré-duales sera confortée en 3.3.2 où nous décrirons des isomorphismes de ces espaces avec les groupes de cohomologie des tores, qui feront correspondre (1.27) à la dualité de Poincaré de cette cohomologie.

**Proposition 1.28.** Soit  $R$  un espace vectoriel normé,  $\omega$  une  $n$ -forme sur  $R$ ,  $\mathcal{H} \subset R$  une hypersurface  $\mathcal{C}^1$ . On munit  $\Lambda^{n-1}R$  de l'intégrand de Poincaré relatif à la norme de  $R$ . Pour  $\phi$  une  $n-1$ -forme lisse, on note  $|\phi|_\infty^* = \sup_{x \in \partial D} F^*(\phi_x)$ . Alors l'aire de  $\mathcal{H}$  pour  $F$  vérifie

$$\int_{\mathcal{H}} \mu_F = \sup \left\{ \int_{\partial D} \phi : \phi \in \mathcal{C}(R, \Lambda^{n-1}R), |\phi|_\infty^* \leq 1 \right\}, \quad (1.29)$$

où  $F^*$  est l'intégrand de Poincaré relativement à la norme de  $R$ .

*Démonstration.* Remplaçons  $\|\alpha\|_F^*$  dans (1.16) en utilisant (1.27); cela donne

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{H}} \mu_F &= \sup \left\{ \frac{\tau \wedge \alpha}{\omega} : F^*(\tau) \leq 1 \right\} \sigma \\ &= \sup \left\{ \int_{\mathcal{H}} \frac{\phi \wedge \alpha}{\omega} \sigma : |\phi|_{\infty}^* \leq 1 \right\}, \end{aligned}$$

l'interversion étant justifiée par sélection mesurable d'un maximisant  $\phi$ , puis par la densité  $L^1$  des formes continues dans les formes  $L^\infty$ . Puisque  $\alpha$  est transverse,

$$\frac{\phi \wedge \alpha}{\omega} \sigma = \frac{\sigma \wedge \alpha}{\omega} \phi|_{\Lambda_{n-1}T\mathcal{H}}.$$

Par définition de  $\alpha$ ,  $\sigma \wedge \alpha = \omega$ . Ceci donne (1.29). □

### 1.1.5 Intégrands paramétriques, intégrands sur les variétés.

On peut généraliser toutes les définitions précédentes en remplaçant l'espace vectoriel  $R$  par une variété différentielle orientable  $V$  – il est préférable de requérir l'orientabilité si l'on tient à considérer des intégrands non symétriques – avec pour seule conséquence essentielle des notations plus lourdes. Les preuves des propositions 1.15 et 1.28 étant locales, elles s'adaptent. Un degré de généralité intermédiaire est l'intégrand paramétrique dans un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  du chapitre 5 de [Fed69]), qui consiste à laisser de côté seulement l'invariance par translations.

**Définition 1.30.** Une  $k$ -densité sur  $V$  est une collection de  $k$ -densités  $F_x : \Lambda_k T_x V \rightarrow \mathbb{R}_+$  telle que pour toute section continue  $\xi$  de  $\Lambda_k TV$ ,  $x \mapsto F_x \xi_x$  est continue. De même, une co-densité est une collection de co-densités dans les fibres de  $\Lambda^k TV$ , qui s'évaluent continûment sur toutes les  $k$ -formes continues.

Dans toute la suite de ce texte on appellera norme sur  $\Lambda_k TV$  (ou sur  $\Lambda^k TV$ ) une  $k$ -densité sur  $V$  qui est une norme dans chacune des fibres. En particulier, une norme sur  $TV$  est une structure finslérienne<sup>4</sup>.

A titre d'exemple, formulons la proposition 1.28 dans une variété finslérienne :

**Proposition 1.31** (Reformulation globale de 1.28). Soit  $V$  une variété finslérienne orientée de dimension  $n$ ,  $\omega$  une forme de volume positive sur  $V$ . Soit  $\mathcal{H}$  une hypersurface  $C^1$  de  $V$ . On munit le fibré  $\Lambda^{n-1} TV$  de l'intégrand de Poincaré  $F^*$  relatif à la structure finslérienne de  $V$ , autrement dit  $F^*(\xi|\omega) := \|\xi\|$  où  $\|\cdot\|$  est la structure finslérienne. Pour  $\phi$  une  $n-1$ -forme continue, on note :

$$|\phi|_{\infty}^* = \sup_{x \in V} F_x^*(\phi_x).$$

Alors l'aire de  $\mathcal{H}$  pour  $F$  vérifie

$$\int_{\mathcal{H}} \mu_F = \sup \left\{ \int_{\partial D} \phi : |\phi|_{\infty}^* \leq 1 \right\}, \quad (1.32)$$

---

4. On n'impose pas de lissitude, ni de forte convexité à la structure finslérienne, ce qui serait nécessaire en théorie pour mener à bien le calcul différentiel en géométrie finslérienne et retrouver les invariants riemanniens, voir par exemple [BCS00].

pour  $\phi$  section continue de  $\Lambda^{n-1}V$ , où  $F^*$  est l'intégrand de Poincaré relativement à la norme de  $R$ .

### 1.1.6 Volume finslérien, volume de Liouville

Nous évoquons ici deux définitions alternatives dont nous ne ferons pas usage dans la suite :

**Volume finslérien** Soit  $V$  une variété orientée munie d'une structure finslérienne  $\|\cdot\| : TV \rightarrow \mathbb{R}_+$ . Si  $W$  est une sous-variété de  $V$ , de dimension  $m$ ,  $W$  est aussi une variété finslérienne avec  $\|\cdot\|_W$  induite sur  $TW$ .

**Définition 1.33.** *Il existe une unique  $m$ -forme continue  $\omega : \Lambda^m TW \rightarrow \mathbb{R}$  telle que pour tout  $w \in W$ , si  $B_w$  est la boule unité de  $\|\cdot\|$  dans  $T_w W$ ,  $\int_{B_w} \omega_w = \Omega_n$ . où  $\Omega_n = \frac{2\pi n^{1/2}}{n\Gamma(n/2)}$  est le volume riemannien de la  $n$ -boule unité euclidienne. On appelle  $\omega$  la forme de volume finslérien sur  $W$ .*

En particulier, supposons que  $\dim V = 2$  et que  $W$  est l'image d'une courbe de Jordan  $\gamma : S^1 \rightarrow V$ ,  $C^1$  par morceaux. Alors

$$\int_W \omega = \int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\| dt.$$

Autrement dit, en dimension et codimension 1, le volume finslérien correspond à  $\mu_F(W)$  pour  $F$  l'intégrand sur  $\Lambda_1 TV \simeq TV$  donné par la norme finslérienne de départ. Cette construction est très particulière à la dimension 2.

**Volume de Liouville** Une dernière définition du périmètre fait appel à la structure symplectique canonique du fibré cotangent  $T^*\partial D$  :

**Définition 1.34** (volume de Liouville). *Soit  $V$  une variété finslérienne. On définit le volume de Liouville d'une sous-variété  $W$  de dimension  $m$  comme suit : Soit  $T^*W$  le fibré cotangent de  $W$ , muni de la structure finslérienne  $\|\cdot\|^*$ . On note  $B^*W$  le fibré des boules unités de  $T^*W$ ,  $\alpha$  la forme de Liouville sur  $T^*W$ .*

$$\mathcal{L}(W) = \int_{B^*W} (d\alpha)^{\wedge m}.$$

## 1.2 Inégalité isopérimétrique anisotrope

### 1.2.1 Généralités

**Définition 1.35** ([Gro07] 6.4). *On dit que la variété  $V$  munie de la forme volume  $\omega$  et de l'intégrand  $F$  a pour dimension isopérimétrique  $m$  si*

$$\inf \left\{ \mu > 1 : \exists \kappa > 0, \left( \int_D \omega \right)^{\mu-1} \leq \kappa \mu_F(\partial D)^\mu \right\},$$

où  $D$  parcourt l'ensemble des domaines compacts à bord  $C^1$  de  $V$ .



Donnons quelques exemples dans le monde riemannien :

*Exemple 1.36.* L'espace euclidien  $\mathbb{E}^n$  a pour dimension isopérimétrique  $n$ .

*Exemple 1.37* (cf. la proposition A.9). Le groupe de Heisenberg de dimension 3, muni d'une métrique riemannienne invariante à gauche, a pour dimension isopérimétrique 4.

*Exemple 1.38.* Le groupe  $\text{Sol}_3(\mathbb{R})$  de dimension 3, muni d'une métrique riemannienne invariante à gauche, a une dimension isopérimétrique infinie.

*Exemple 1.39* (cf. la proposition A.8). L'espace hyperbolique  $\mathbb{H}^n$  a dimension isopérimétrique infinie. Mieux, il admet l'inégalité isopérimétrique linéaire suivante (on dit que  $\mathbb{H}^n$  est ouverte à l'infini)

$$\text{vol}(D) \leq \frac{\text{vol}(\partial D)}{n-1}. \quad (1.40)$$

Soit  $R$  un espace vectoriel de dimension  $n$  muni d'une  $n$ -forme invariante  $\omega$  et d'un intégrand  $F$  qui ne s'annule pas. Alors  $R$  a pour dimension isopérimétrique  $n$ . En effet, d'après 1.1.3, si l'on introduit une structure euclidienne sur  $R$ , pour tout domaine  $D$ , le volume  $\int_D \omega$  et le périmètre  $\mu_F(\partial D)$  sont encadrés par des multiples scalaires des volumes euclidiens correspondants. Plus précisément, la relation entre volume et périmètre est donnée par le

**Théorème 1.41** (Inégalité isopérimétrique de Brunn). *Soit  $R$  un espace vectoriel normé,  $F$  l'intégrand dual de l'intégrand de Poincaré de  $R$  pour la forme volume  $\omega$ . Alors pour tout domaine  $D$  compact à bord  $C^1$ ,*

$$\int_D \omega \leq \frac{1}{n} \mu_F(D)^{\frac{n}{n-1}}. \quad (1.42)$$

*De plus, il y a égalité si et seulement si  $D$  est l'image de la boule unité  $B$  par une homothétie affine de  $R$ .*

Dans la suite, nous montrons l'inégalité (1.42) pour les domaines à bord  $C^2$  (corollaire 1.53), et caractérisons le cas d'égalité parmi les domaines fortement convexes (proposition 1.61).

Sous certaines conditions détaillées en 1.2.2, la constante isopérimétrique est égale à la constante de Sobolev. C'est pourquoi on évaluera la constante de Sobolev en 1.2.3, au moyen du lemme de transport de Knothe, suivant une idée due à Gromov [Gro86] s'appuyant sur le travail de<sup>5</sup> Knothe [Kno57].

## 1.2.2 Inégalités isopérimétriques et inégalités fonctionnelles

Les inégalités de Brunn et de Brunn-Minkowski (voir C.6) ont des analogues en analyse (respectivement des inégalités de Sobolev et de Prékopa-Leindler) et s'inscrivent plus largement dans un ensemble d'inégalités dont le survol [Gar02] décrit la hiérarchie enchevêtrée. Nous nous concentrons sur la correspondance entre inégalité isopérimétrique et inégalité de Sobolev.

---

5. L'objectif originel de Knothe [Kno57] était de donner une forme plus générale à l'inégalité de Brunn-Minkowski, évoquée en C.2.

**Proposition 1.43.** Soient  $V$  une variété finslérienne orientée de dimension  $n$ ,  $\omega$  un élément de volume sur  $V$ . On suppose qu'il existe une constante  $c > 0$  telle que  $V$  admet l'inégalité isopérimétrique suivante : pour tout domaine  $D$  à bord  $C^1$  de dimension  $n$ ,

$$\int_D \omega \leq c \mu_F(D)^{\frac{n}{n-1}}. \quad (1.44)$$

Alors, toute fonction  $u \in C_c^1(V)$  vérifie l'inégalité de Sobolev

$$\|u\|_{\frac{n}{n-1}} \leq c^{\frac{n-1}{n}} \int_V \|du\|^* \omega. \quad (1.45)$$

Avant de commencer la preuve, énonçons un lemme qui est à la fois une généralisation de la formule de la coaire riemannienne et un cas particulier de la formule de coaire anisotrope pour des applications lipschitziennes démontrée en annexe B.

**Lemme 1.46.** Soit  $V$  une variété finslérienne munie d'un élément de volume  $\omega$ ,  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $C^1$ . Alors

$$\int_V \|df\|^* \omega = \int_{\mathbb{R}} \mu_F(f^{-1}(t)) dt, \quad (1.47)$$

où  $F$  est l'intégrand dual de l'intégrand de Poincaré.

*Remarque 1.48.* L'intégrale de droite a un sens car d'après le lemme de Sard, pour presque tout  $t \in \mathbb{R}$ , l'ensemble  $f^{-1}(t)$  est une sous-variété.

*Démonstration du lemme 1.46.* C'est une conséquence directe du théorème B.8.  $\square$

*Démonstration de la proposition 1.43.* Supposons l'inégalité (1.44) vérifiée, et  $u$  une fonction sur  $V$  à support compact, que nous commencerons par supposer positive. Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , soit  $\chi_t$  la fonction indicatrice de l'ensemble de niveau  $u > t$ . Alors  $u$  admet la décomposition intégrale :

$$u(x) = \int_0^{+\infty} \chi_t(x) dt.$$

L'inégalité triangulaire intégrale pour la norme  $L^{\frac{n}{n-1}}$  permet d'écrire

$$\|u\|_{\frac{n}{n-1}} \leq \int_0^{+\infty} \|\chi_t\|_{\frac{n}{n-1}} dt = \int_0^{+\infty} \left( \int_{\{u>t\}} \omega \right)^{\frac{n-1}{n}}.$$

Pour presque tout  $t \geq 0$ , l'ensemble  $\{u > t\}$  est un domaine. L'inégalité isopérimétrique (1.44) appliquée à  $\{u > t\}$  donne

$$\int_0^{+\infty} \left( \int_{\{u>t\}} \omega \right)^{\frac{n-1}{n}} \leq c^{\frac{n-1}{n}} \int_0^{+\infty} \mu_F(u^{-1}(t)) dt \stackrel{(1.47)}{=} c^{\frac{n-1}{n}} \int_V \|du\|^* \omega.$$

Il s'agit bien de l'inégalité de Sobolev (1.45). Pour finir,  $u$  n'est pas nécessairement positive. Toutefois, si l'on pose  $u_s = \sqrt{s + u^2}$  pour tout  $s > 0$ , alors l'inégalité vaut pour  $u_s$

d'après la preuve précédente, et de plus  $\|du_s\|^* \leq \|du\|^*$  pour tout  $s$ . Faisant  $s \rightarrow 0$ , on obtient par convergence dominée  $\|u\|_{\frac{n}{n-1}} = \lim_{s \rightarrow 0} \|u_s\|_{\frac{n}{n-1}}$ , ce qui donne l'inégalité (1.45) pour  $u$ .  $\square$

**Proposition 1.49.** *Soit  $R$  un espace vectoriel normé. Alors l'inégalité fonctionnelle (1.45) entraîne l'inégalité isopérimétrique (1.44) pour les domaines à bord  $C^2$ .*

*Démonstration.* Soit  $\varepsilon > 0$  et  $u_\varepsilon$  la fonction sur  $R$  définie par  $u_\varepsilon(x) = \max(1 - \text{dist}(x, D)/\varepsilon, 0)$ . Alors,  $u_\varepsilon$  est  $C^1$  sur  $\{x \in R \setminus D : d(x, D) < \varepsilon\}$  et  $\|du_\varepsilon\|^* \equiv 1/\varepsilon$ . Enfin, bien que n'étant pas  $C^1$  globalement,  $u_\varepsilon$  vérifie l'inégalité (1.45). Quand  $\varepsilon$  tend vers 0,  $\int_R \|du_\varepsilon\|^* \omega$  converge vers le contenu extérieur de Minkowski de  $D$ . D'après le théorème C.12, celui-ci coïncide avec le périmètre de  $D$ .  $\square$

*Remarque 1.50.* Si  $c_S$  est la constante de Sobolev et  $c_I$  la constante isopérimétrique, la proposition 1.43 donne  $c_S \leq c_I$  tandis que la proposition 1.49 donne l'égalité de ces deux constantes dans un espace vectoriel normé.

### 1.2.3 Evaluation de la constante de Sobolev

La référence pour cette section est l'appendice de M. Gromov dans [Gro86], dont nous suivons la preuve.

**Théorème 1.51** ([Gro86], p. 126). *Soit  $R$  un espace vectoriel normé de dimension  $n$ ,  $\|\cdot\|$  sa norme ( $\|\cdot\|^*$  la norme duale sur  $R^*$ ), muni d'un élément de volume  $\omega$  normalisé pour que la boule unité soit de volume 1. Alors pour toute fonction  $u$  de classe  $C^1$  à support compact dans  $R$ ,*

$$\left( \int_R |u|^{\frac{n}{n-1}} \omega \right)^{\frac{n-1}{n}} \leq \frac{1}{n} \int_R \|du\|^* \omega. \quad (1.52)$$

Cette inégalité est du type de (1.45). Par conséquent, il lui correspond via la proposition 1.49 une inégalité isopérimétrique, la voici.

**Corollaire 1.53.** *Soit  $R$  un espace vectoriel normé de dimension  $n$ ; on munit  $\Lambda^{n-1}R^*$  de l'intégrand de Poincaré associé à la norme de  $R$ . Alors pour tout domaine  $D$  compact à bord  $C^2$  par morceaux,*

$$\left( \int_D \omega \right)^{\frac{n-1}{n}} \leq \frac{1}{n} \mu_F(\partial D). \quad (1.54)$$

Suivant [Gro86] p. 127, nous effectuons la démonstration du théorème 1.51 au moyen du lemme 1.55 suivant, de l'inégalité arithmético-géométrique et du théorème de la divergence.

**Lemme 1.55** (Transport de Knothe). *Soit  $n \geq 1$  un entier naturel; l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^n$  est muni de la mesure de Lebesgue  $\mathcal{L}$ . Soient  $S, C \subset \mathbb{R}^n$  deux ouverts non vides relativement compacts avec  $C$  convexe et  $\mu : S \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction strictement positive. Alors il existe  $y : S \rightarrow C$  telle que*

1.  $y$  est triangulaire, dans le sens où elle s'écrit sous la forme

$$y(x_1, \dots, x_n) = (y_1(x_1), y_2(x_1, x_2), \dots, y_n(x_1, \dots, x_n)).$$

2. Les dérivées partielles  $\partial y_i / \partial x_i$  sont toutes strictement positives.

3. Le jacobien de  $y$  pour  $\mathcal{L}$  est tel que pour tout  $s \in S$

$$\mathcal{J}y(s) = \frac{\mathcal{L}(C)\mu(s)}{\int_S \mu(x)dx}.$$

*Démonstration du lemme 1.55.* On commence par démontrer le lemme dans le cas particulier où  $C$  est le cube unité

$$C_0 := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \forall i \in \{1, \dots, n\}, 0 < x_i < 1\}$$

Pour tout  $s \in S$ , on introduit deux domaines dépendant de  $s$  :

$$A_i(s) = \{x \in S : x = (x_1, \dots, x_n), x_j = x_j(s) \text{ pour } j < i \text{ et } x_i \leq x_i(s)\}$$

$$B_i(s) = \{x \in S : x = (x_1, \dots, x_n), x_j = x_j(s) \text{ pour } j < i\}$$

Puis  $y$  est définie comme :

$$y_i(s) := \frac{\int_{A_i(s)} \mu(x)dx}{\int_{B_i(s)} \mu(x)dx}.$$

Alors  $y$  est bien définie sur  $S$ ;  $y_i$  ne dépend pas de  $x_j$  pour  $j > i$  donc  $y$  est bien triangulaire, et de l'inclusion  $A_i(s) \subsetneq B_i(s)$  nous déduisons que  $y$  prend valeur dans  $C_0$ . Par ailleurs,  $B_i$  est invariant par rapport à  $x_i$ , donc pour  $i < n$  on a :

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_i}(s) = \frac{\int_{B_{i+1}} \mu(x)dx}{\int_{B_i} \mu(x)dx}.$$

Tandis que  $(\partial y_n / \partial x_n(s)) \int_{B_{n-1}(s)} \mu(x)dx = \mu(s)$ . Remarquons aussi que  $B_1 = S$ , de sorte que finalement

$$\mathcal{J}y(s) = \prod_{i=1}^n \frac{\partial y_i}{\partial x_i} = \frac{\int_{B_2} \mu(x)dx}{\int_S \mu(x)dx} \cdots \frac{\mu(s)}{\int_{B_{n-1}} \mu(x)dx} = \frac{\mu(s)}{\int_S \mu(x)dx}.$$

A présent, prenons  $C$  convexe non vide relativement compact quelconque, et  $\mu_C : C \rightarrow \mathbb{R}$  constante égale à 1. D'après le lemme dans le cas particulier, il existe  $y^0 : C \rightarrow C_0$  et  $y^1 : S \rightarrow C_0$  avec les conditions 1, 2 et 3 requises relativement à  $\mu_0$  et  $\mu$  respectivement. Par construction,  $\mu_0$  est un difféomorphisme et  $\mu_0^{-1}$  vérifie les conditions 1 et 2. On pose

$$y := y_0^{-1} \circ y_1.$$

Alors  $y$  vérifie 1 et 2 (qui sont stables par composition), et pour tout  $s$  dans  $S$ ,

$$\mathcal{J}y(s) = \mathcal{J}y_1(s) (\mathcal{J}y^0(y^1(s)))^{-1} = \frac{\mu(s)}{\int_S \mu(x)dx} \frac{\int_C \mu_0(x)dx}{\mathcal{L}(C)\mu_0(y^1(s))} = \frac{\mu(s)}{\int_S \mu(x)dx}.$$

□

*Remarque 1.56.* L'usage de la lettre  $\mu$  n'est pas anodin. L'application  $y$  est telle que  $y_*(\mu|_S) =$

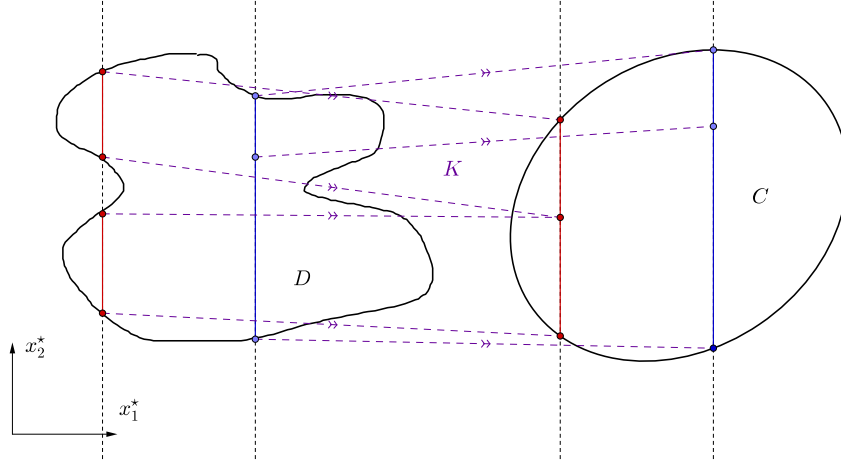


FIGURE 5 – Un transport de Knothe (lemme 1.55) dans  $\mathbb{R}^2$  avec  $\mu$  constante sur  $S$ .

$\mathcal{L}|_C$ ; à ce titre, il s'agit d'un transport de masse.

*Démonstration du théorème 1.51.* Soit  $B$  la boule unité de  $R$ , et  $x_1, \dots, x_n$  des formes coordonnées. Soit  $u$  telle que dans les hypothèses du théorème. On définit  $S = \{u > 0\}$  et  $\mu(x) = |u(x)|^{\frac{n}{n-1}}$ , définie sur  $S$ . Puis on considère  $y : S \rightarrow B$  telle que fournie par le lemme 1.55. Alors d'après l'inégalité arithmético-géométrique, pour tout  $s \in S$ ,

$$(\operatorname{div} y(s)) = (\operatorname{tr} dy(s)) \geq n \mathcal{J}y(s)^{1/n} = n \left( \frac{\mu(s)}{\int_S \mu(x) dx} \right)^{1/n}, \quad (1.57)$$

avec égalité si et seulement si les  $\partial y_i / \partial y_i$  sont égaux, ce qui se produit quand  $S$  est la translatée d'une boule de  $R$  et  $y$  une similitude affine. Ainsi,

$$\int_S |u(x)|^{\frac{n}{n-1}} dx = \int_S |u(x)| \mu(x)^{1/n} dx \leq \frac{(\int_S \mu(x) dx)^{1/n}}{n} \int_S |u(x)| \operatorname{div} y(x) dx.$$

Puisque  $u = 0$  sur la frontière de  $S$ , l'intégrale  $\int_S \operatorname{div}(|u(x)|y(x)) dx$  s'annule<sup>6</sup>, ce qui permet de réécrire la dernière intégrale,

$$\int_S |u(x)| \operatorname{div} y(x) dx = - \int_S \langle d|u(x)|, y(x) \rangle dx.$$

6. Détaillons l'argument : soit  $S'$  une boule contenant  $S$ , on prolonge  $u$  à un voisinage de  $S'$  par 0 en dehors de  $S$ , puis on applique le théorème de la divergence à  $u$  sur  $S'$ , ce qui donne avec  $\nu$  la normale extérieure de  $S'$

$$\int_S \operatorname{div}(|u(x)|y(x)) dx = \int_{S'} \operatorname{div}(|u(x)|y(x)) dx = \int_{\partial S'} \langle uy, \nu \rangle = 0$$

Enfin, puisque  $y$  est à valeurs dans  $B$ ,

$$\int_S |u(x)|^{\frac{n}{n-1}} dx \leq \frac{(\int_S \mu(x) dx)^{1/n}}{n} \int_S \|du(x)\|^* dx. \quad (1.58)$$

On obtient (1.52) en divisant les deux membres par  $(\int_S \mu(x) dx)^{1/n}$ .  $\square$

*Remarque 1.59.* On pourra comparer la preuve précédente avec celle de l'inégalité isopérimétrique dans un espace euclidien A.5 en annexe, qui fait appel au transport de Brenier. Une preuve de l'inégalité de Brunn-Minkowski ([Fed69], 3.2.41, ici retranscrite en C.6) est également reminiscente du lemme 1.55.

#### 1.2.4 Cas d'égalité dans l'inégalité isopérimétrique de Brunn

La preuve précédente ne permet pas d'établir le cas d'égalité dans (1.54). En effet, celui-ci n'est jamais atteint dans la version fonctionnelle (1.52), sauf quand les deux membres sont nuls. Un examen de la saturation des inégalités (1.57) et (1.58) permet de constater que pour que l'égalité soit proche d'être réalisée,  $\mu$  (donc  $u$ ) doit réaliser l'essentiel de ses variations à proximité du bord de  $S$ , et les dérivées partielles  $\partial y_i / \partial x_i$  doivent être égales et égales à 1, ce qui suggère que la fonction  $u$  doit s'approcher d'un multiple scalaire de l'indicatrice d'une boule.

Il est tentant d'appliquer le transport de Knothe aux fonctions constantes sur un domaine à bord  $C^1$  pour obtenir directement la forme isopérimétrique de l'inégalité de Brunn. Cependant cette démarche se heurte à une difficulté : à la frontière du domaine, la différentiabilité du transport de Knothe, et donc l'application du théorème de la divergence (ou de la formule de Stokes) pose problème. Les arguments peuvent être rendus rigoureux au niveau plus général des ensembles de périmètre localement fini (voir par exemple [FMP10]); toutefois cette notion ne sera pas définie avant 2.3. Voici quand même une hypothèse (lourde) moyennant laquelle on peut pratiquer la preuve élémentaire :

**Lemme 1.60.** *Soit  $R$  un espace vectoriel normé de dimension  $n$ . Soient  $S$  et  $C$  des ouverts non vides fortement convexes<sup>7</sup> sur  $R$ . Alors pour tout système de formes coordonnées  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  sur  $R$ , il existe un transport de Knothe  $z : S \rightarrow C$  sur  $R$  relativement à  $\mathbf{x}$  qui est lipschitzien sur  $S$ .*

*Démonstration (esquisse).* Soit  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  un système de formes coordonnées ; on identifie  $S$  et  $C$  à des ouverts fortement convexes de  $\mathbb{R}^n$  via  $\mathbf{x}$  (qui est une application lipschitzienne). On reprend la construction de  $y$  effectuée dans la preuve de 1.55, avec  $\mu \equiv 1$  sur  $S$ . Les dérivées partielles  $\partial y_j / \partial x_i$  pour  $i < j$  sont bornées par dérivation sous le signe  $\int$  ; pour les  $\partial y_i / \partial x_i$  on procède par récurrence<sup>8</sup> sur la dimension. En dimension 1 le résultat est acquis (le transport est affine) ; en dimension  $n > 2$  par l'hypothèse de récurrence le seul problème se pose au voisinage des points extrémaux de  $x_1$  sur  $S$ . La condition de forte convexité associée

7. On dit que  $U \subset R$  est fortement convexe si  $\partial \bar{U}$  est une hypersurface  $C^2$  et s'il existe  $\alpha > 0$  et  $g$  une structure euclidienne sur  $R$  tels que  $\mathbb{I}_{\partial \bar{U}}(X, Y) \geq \alpha(g(X, X) + g(Y, Y))$ . Ceci implique que  $U$  est relativement compact.

8. L'intersection d'un fortement convexe avec un hyperplan affine, est fortement convexe.

au lemme de Morse, fournit deux constantes  $\delta, \eta > 0$  telles que pour  $t, s$  au voisinage à droite respectivement de  $t_0 = \inf_S x_1$  et  $s_0 = \inf_C x_1$ ,

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^{n-1}(S \cap \{x_1 = t\}) &\leq \delta(t - t_0)^{\frac{n-1}{2}} \\ \mathcal{H}^{n-1}(C \cap \{x_1 = s\}) &\geq \eta(s - s_0)^{\frac{n-1}{2}}\end{aligned}$$

ce qui donne la borne souhaitée sur  $\partial y_1 / \partial x_1$ .  $\square$

Nous sommes à présent en mesure de démontrer une forme faible du cas d'égalité dans l'inégalité isopérimétrique de Brunn, qui est la seconde partie du théorème 1.41.

**Proposition 1.61** (Cas d'égalité dans 1.41). *Sous les hypothèses du corollaire 1.53, il y a égalité dans (1.54) si et seulement si  $D$  est l'image de la boule unité de  $R$  par une translation-homothétie.*

*Démonstration.* Soit  $B$  la boule unité de  $R$ . Supposons que  $D$  a son centre de gravité à l'origine et même volume que  $B$ . Il faut montrer que  $D = B$ . La condition d'égalité dans l'inégalité arithmético-géométrique implique que

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_1} = \dots = \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \equiv 1.$$

étant donné que toutes ces dérivées partielles sont positives et que leur produit vaut 1. Posons alors, suivant un argument issu de [FMP10], pour toute  $\varphi \in R^*$ ,

$$\mu_\varphi = \varphi_* \mu,$$

où  $\mu$  est la mesure de probabilité sur  $D$ . Puisqu'il existe un transport de Knothe  $y^\varphi$  avec  $x_1 = \varphi$ , et  $\partial y_1 / \partial x_1 = 1$ , on sait que  $\mu_\varphi$  et  $\varphi_* \mu_B$  ont même support, où  $\mu_B$  est la mesure de probabilité uniforme sur  $B$ . Ainsi  $\varphi(D) \subset \varphi(B)$ . Puisque ceci vaut pour toute forme linéaire, et comme  $B$  est convexe,  $D \subset B$ . Puisque  $D$  et  $B$  ont même volume,  $D = B$ .  $\square$

## 2 Vocabulaire des courants

Nous serons amenés ici à énoncer le problème isopérimétrique dans un sens généralisé aux courants entiers, qui sont une formalisation des domaines avec multiplicités entières. Les espaces de distributions usuels sont construits par dualité à partir d'espace de fonctions lisses à valeurs dans  $\mathbb{R}$ ; cette définition peut être élargie, en remplaçant l'espace d'arrivée par un espace de Banach [Fed69] et les fonctions par des sections d'un fibré vectoriel. Pour définir les courants sur une variété, on procèdera par dualité par rapport à des espaces de  $k$ -formes différentielles lisses. Ainsi les courants seront des distributions dans un sens généralisé, tandis que les distributions usuelles seront des 0-courants.

### 2.1 Courants

Nous suivons et adaptons au cadre des variétés le début du chapitre 4 de [Fed69]).

#### 2.1.1 Définitions, opérations sur les courants

Soit  $V$  une variété différentielle  $\mathcal{C}^\infty$  orientée de dimension  $n$ , sans bord. On désigne par  $\mathcal{E}^m(V)$  l'espace des  $m$ -formes différentielles lisses de  $V$ , muni de la topologie définie par la famille de semi-normes suivante :

Pour toute carte  $(U, \varphi)$  de l'atlas de  $V$ , pour tout  $K \subset U$  compact contractile, pour toute trivialisations  $\psi$  de  $TV$  au-dessus de  $K$ , pour tout  $i \in \mathbb{N}$ ,

$$\nu_{U, \varphi, K, \psi}^i(\phi) = \sup\{|D^j \tilde{\phi}(x)| : 0 \leq j \leq i, x \in \varphi(K)\} \quad (2.1)$$

où  $\tilde{\phi}$  est la forme  $\phi$  lue dans la trivialisations  $\psi$  et la carte  $\varphi$ , autrement dit<sup>9</sup>  $\tilde{\phi} = \Lambda^m \psi \circ (\varphi^{-1}, \text{id})$ .

Pour tout  $K \subset V$  compact, on définit  $\mathcal{D}_K^m(V)$  comme l'ensemble des  $\psi \in \mathcal{E}^m(V)$  à support dans  $K$ ; puis

$$\mathcal{D}^m(V) = \bigcup_K \mathcal{D}_K^m(V),$$

avec la topologie la plus fine telle que les inclusions  $\mathcal{D}_K^m(V) \rightarrow \mathcal{D}^m(V)$  soient continues. Il y a une inclusion continue  $\mathcal{D}^m(V) \hookrightarrow \mathcal{E}^m(V)$  mais celle-ci n'est pas un homéomorphisme sur son image en général.

**Définition 2.2.** Soit  $V$  une variété différentielle. L'espace des courants (resp. des courants à support compact) de dimension  $m$  sur  $V$ , noté  $\mathcal{E}_m(V)$  (resp.  $\mathcal{D}_m(V)$ ) est le dual topologique de  $\mathcal{E}^m(V)$  (resp. de  $\mathcal{D}^m(V)$ ) muni de la topologie faible- $\star$ .

Tout comme les espaces de distributions usuelles,  $\mathcal{E}_m(V)$  et  $\mathcal{D}_m(V)$  sont munis de structures de  $\mathcal{C}^\infty(V)$ -modules, que l'on écrit à droite : si  $T$  est un courant de dimension  $m$  et  $v \in \mathcal{C}^\infty(V)$   $T \lfloor v$ , on définit  $T \lfloor \varphi$  par

$$(T \lfloor v)\phi = T(v\phi).$$

9. La norme que nous plaçons sur  $\Lambda^m \mathbb{R}^n$  pour normer les dérivées  $D^j \tilde{\phi}$  n'a pas d'importance ici, un choix différent donnera des semi-normes équivalentes.



*Remarque 2.3.* On peut souhaiter multiplier un courant par des scalaires moins réguliers, en particulier par des fonctions caractéristiques; cela est parfois possible, nous donnerons une condition en 2.2.1.

Cette écriture du scalaire à droite est justifiée par l'extension de l'opération aux  $k$ -formes et aux  $k$ -vecteurs donnée par la définition suivante :

**Définition 2.4.** Soit  $T$  un courant de dimension  $m$  et  $\varphi$  une forme différentielle de degré  $k$ . Alors  $T \lfloor \varphi$  est le courant de dimension  $m - k$  défini pour tout  $\psi \in \mathcal{E}^{m-k}(V)$  (resp.  $\psi \in \mathcal{D}^{m-k}(V)$ ) par :

$$(T \lfloor \varphi)\psi = T(\varphi \wedge \psi).$$

Autrement dit,  $-\lfloor \varphi$  est l'adjoint de  $\varphi \wedge -$ . De même, si  $\xi$  est un champ de  $k$ -vecteurs,  $T \wedge \xi$  est le courant de dimension  $m + k$  tel que :

$$(T \wedge \xi)\psi = T(\xi \rfloor \psi),$$

où  $\rfloor$  désigne le produit intérieur. Autrement dit,  $-\wedge \xi$  est l'adjoint de  $\xi \rfloor -$ .

Les opérations  $\lfloor$  et  $\wedge$  naturellement définies sur les courants et en interaction avec les formes différentielles et les champs de multivecteurs rappellent que  $T$  se comporte comme un champ de  $m$ -vecteurs. Le lien sera précisé dans la section suivante.

Enfin, l'opérateur de bord est l'application transposée de la différentielle extérieure :

**Définition 2.5.** Soit  $T$  un  $m$ -courant. On définit le bord de  $T$ , noté  $\partial T$ , comme le  $m-1$ -courant défini pour  $m \geq 1$  par :

$$(\partial T)\psi = T(d\psi).$$

Pour  $m = 0$ ,  $\partial T = 0$ .

De l'identité  $d \circ d = 0$  pour les formes différentielles, on déduit  $\partial \circ \partial = 0$  pour les courants. Il s'ensuit que  $(\mathcal{E}_*(V), \partial)$  et  $(\mathcal{D}_*(V), \partial)$  sont des complexes de chaînes. On considèrera en particulier

$$\{0\} \xleftarrow{\partial} \mathcal{D}^0(V) \xleftarrow{\partial} \mathcal{D}^1(V) \xleftarrow{\partial} \mathcal{D}^2(V) \xleftarrow{\partial} \dots$$

Les groupes d'homologie de ces complexes s'annulent en degré  $> \dim V$ . Il seront étudiés plus avant en 2.4.

**Poussé en avant**  $\mathcal{E}^m$  et  $\mathcal{D}^m$  sont des foncteurs contravariants sur les variétés lisses. Étant construits par dualité à partir de ces derniers,  $\mathcal{E}_m$  et  $\mathcal{D}_m$  sont eux covariants. L'opération naturelle est ainsi de pousser les courants en avant par les morphismes lisse (lisse et propre dans le cas de  $\mathcal{D}_m$ ) :

**Définition 2.6** (Poussé en avant). Soient  $V, V'$  deux variétés différentielles lisses et  $f : V \rightarrow V'$  une application lisse (resp. lisse et propre). Si  $T \in \mathcal{E}_m(V)$  (resp.  $T \in \mathcal{D}_m(V)$ ), on définit  $f_{\#}T \in \mathcal{E}_m(V')$  (resp.  $f_{\#}T \in \mathcal{D}_m(V')$ ) par :

$$f_{\#}T(\phi) = T(f^*\phi).$$

$f_{\#}$  commute à l'opérateur de bord :  $\partial f_{\#}T = \partial f_{\#}T$ , ce qui permet à  $f$  d'induire une application en homologie.

**Produit cartésien** Nous renvoyons à [Fed69], 4.1.8 pour les preuves des affirmations de ce paragraphe. Soient  $V$  et  $W$  deux variétés différentielles lisses. On considère le produit cartésien  $V \times W$  muni des deux projections  $p_V, p_W$ . L'espace vectoriel engendré par formes différentielles  $p_V^* \alpha \wedge p_W^* \beta$ , avec  $\alpha \in \mathcal{D}^i(V)$  et  $\beta \in \mathcal{D}^{k-i}(W)$ ,  $i$  variant de 0 à  $k$ , est dense dans  $\mathcal{D}^k(V \times W)$ . Etant donnés  $S \in \mathcal{D}_i(V)$  et  $T \in \mathcal{D}(W)$ , il existe un unique courant  $S \times T \in \mathcal{D}_k(V \times W)$  tel que  $(S \times T)(p_V^* \alpha \wedge p_W^* \beta) = S(\alpha)T(\beta)$  si  $\alpha \in \mathcal{D}^i(V)$  et  $\beta \in \mathcal{D}^j(W)$ . De plus, si  $i, j > 0$  alors

$$\partial(S \times T) = (\partial S) \times T + (-1)^i S \times \partial T \quad (2.7)$$

Nous traitons dans la suite deux familles d'exemples de courants associés à des objets géométriques : les formes différentielles, les sous-variétés à bord. Ces deux familles de courants relèvent des courants représentables par intégration qui seront définis en 2.2.1.

### 2.1.2 Exemple : courants étalés

Soit  $V$  une variété différentielle orientée,  $\omega$  une  $n$ -forme volume positive. Si  $\xi$  est un champ de  $m$ -vecteurs mesurable sur  $V$  vérifiant la condition de locale intégrabilité

$$\int_K \|\xi\| \omega < +\infty \quad (2.8)$$

pour tout compact  $K \subset V$ , où  $\|\cdot\|$  désigne une norme quelconque sur  $\Lambda_m TV|_K$  (cette condition ne dépend pas de la norme), alors  $\omega \wedge \xi$  est le courant de  $\mathcal{D}_m(V)$  ( $\mathcal{E}_m(V)$  si  $\xi$  est à support compact) défini par :

$$(\omega \wedge \xi)\psi = \int_V \langle \xi, \psi \rangle \omega.$$

Une construction analogue permet également de former un courant, dit courant étalé, à partir d'une  $n - m$  forme différentielle : le courant étalé  $C_\phi$  associé à la  $n - m$ -forme  $\phi$  mesurable localement intégrable (i.e. vérifiant une condition du type (2.8), qui ne dépend pas de  $\omega$ ) est le courant de dimension  $m$  défini par

$$C_\phi(\eta) = \int_{[V]} \phi \wedge \eta,$$

où  $[V]$  désigne  $V$  orientée. Contrairement à  $\omega \wedge \xi$ , le courant étalé  $C_\phi$  ne dépend pas de  $\omega$ , seulement de l'orientation qui était fixée sur  $V$ . Il y a un lien entre les deux constructions : si  $\xi$  est lisse, alors  $C_\phi = \omega \wedge (\omega \lrcorner \phi)$ .

Pour ces courants, l'opérateur de bord  $\partial$  entretient des liens avec les différentielle extérieure  $d$  et intérieure<sup>10</sup>  $\text{div}_\omega$ , que nous résumons dans la proposition suivante :

---

10. Suivant [Fed69], on rappelle que  $\text{div}_\omega$  est défini sur les champs de  $m$ -vecteurs comme suit :

$$d(\xi \lrcorner \omega) = (-1)^{n - \text{deg } \xi} (\text{div}_\omega \xi) \lrcorner \omega.$$

**Proposition 2.9.** *On suppose  $V$  sans bord. Soit  $\xi$  un champ de multivecteurs (resp.  $\phi$  une forme) lisse. Alors*

$$\partial(\omega \wedge \xi) = -\omega \wedge \operatorname{div}_\omega \xi \quad (2.10)$$

$$\partial C_\phi = (-1)^{n-\deg \phi+1} C_{d\phi} \quad (2.11)$$

*Démonstration.* Par définition de l'opérateur de bord, si  $\eta \in \mathcal{D}^{n-\deg \phi-1}(V)$ , alors

$$[\partial C_\phi + (-1)^{n-\deg \phi} C_{d\phi}] \eta = - \int_V d\eta \wedge \phi + (-1)^{\deg \eta} \eta \wedge d\phi = - \int_V d(\eta \wedge \phi) = 0.$$

La dernière égalité provenant de la formule de Stokes. Nous avons ainsi montré (2.11); l'équation (2.10) s'en déduit en appliquant (2.11) à  $\xi \rfloor \omega$  et la définition de  $\operatorname{div}_\omega$ .  $\square$

### 2.1.3 Exemple : courants d'intégration sur les sous-variétés

**Définition 2.12.** *Soit  $W$  une sous-variété à bord de  $V$ , de classe  $C^1$ , orientée et de dimension  $k$ . Alors  $W$  définit un courant d'intégration  $I_W \in \mathcal{D}_k(V)$  donné par :*

$$I_W(\phi) = \int_{[W]} \phi \quad (2.13)$$

Il découle du théorème de Stokes que le bord du courant d'intégration sur  $W$  orientée est le courant d'intégration sur le bord de  $W$  muni de l'orientation de bord. Si  $W$  est compacte,  $I_W$  est dans  $\mathcal{E}_k(V)$ .

## 2.2 Masse et Norme $\flat$

### 2.2.1 Masse. Courants normaux.

Les exemples de courants développés en 2.1.2 et 2.1.3 appartiennent à la classe plus vaste des courants représentables par intégration au sens de [Fed69] p. 350, qui traite la théorie générale des distributions représentables par intégration.

**Définition 2.14.** *Un courant  $T \in \mathcal{D}_m(V)$  est représentable par intégration s'il existe une mesure de Radon  $\rho$  sur  $V$ , et  $\xi$  un champ de  $m$ -vecteurs  $\rho$ -mesurable, localement  $\rho$ -intégrable tel que*

$$T(\phi) = \int_V \langle \xi(x), \phi(x) \rangle d\rho(x).$$

Les courants représentables par intégration admettent la caractérisation suivante, qui est une application du théorème de représentation de Riesz (voir [Fed69, 2.5.1, 2.5.11, 2.5.13, 4.1.5 et 4.1.7]) :

**Théorème 2.15** (Conséquence de [Fed69], 4.1.5). *Donnons nous  $\|\cdot\|$  une norme sur  $\Lambda^m TV$ . Pour toute fonction  $f \in \mathcal{C}_c(V)$  positive à support compact, et pour  $S$  est un courant de dimension  $m$  on définit  $\|S\|(f) \in [0, +\infty]$  par*

$$\|S\|(f) := \sup \{S(\phi) : \phi \in \mathcal{D}^m(V), \|\phi\| \leq f\} \quad (2.16)$$

Alors si  $\|S\|(f) < +\infty$  pour tout  $f \in \mathcal{C}_c(V)$ ,  $\|S\|$  est une mesure de Radon localement finie sur  $V$ . Dans ce cas,  $S$  est un courant représentable par intégration,  $\rho$  peut être prise égale à  $\|S\|$  dans la définition 2.14) et on note  $\vec{S} = \xi$  le champ de vecteur  $\|S\|$ -localement intégrable correspondant.

Les courants étalés de 2.1.2 sont les courants représentables par intégration sur  $V$ , avec pour  $\rho$  une mesure d'intégration définie par une  $n$ -forme  $\omega$  sur  $V$  (le choix de  $\omega$  n'est pas important). Pour les courants d'intégration sur une sous-variété, la mesure  $\rho$  de représentation est portée sur la sous-variété.

Pour les courants représentables par intégration, une extension des opérations  $\wedge$  et  $\lfloor$  définies en 2.1.1 est permise : si  $T$  est un courant de dimension  $m$  et si  $\phi$  est une  $k$ -forme  $\|T\|$ -localement intégrable  $T \lfloor \phi$  est le courant de dimension  $m - k$  défini par

$$(T \lfloor \phi)(\psi) = \int_V \vec{T}(\phi \wedge \psi) d\|T\| \quad (2.17)$$

En particulier, si  $B$  est un borélien  $\|T\|$ -mesurable, on fera l'abus de notation consistant à désigner  $T \lfloor \mathbf{1}_B$  par  $T \lfloor B$ ; que l'on peut lire comme une restriction de  $T$  à  $B$ .

Il est utile de disposer sur des sous-espaces de courants de normes qui soient duales de normes sur l'espace des formes différentielles. Nous allons voir que cela est possible pour les courants représentables par intégration sur les variétés compactes (plus précisément, pour une classe un peu plus large) par rapport à des normes de type  $L^\infty$  sur les formes différentielles. On commence par introduire une notion proche de celle de courant représentable par intégration :

**Définition 2.18.** Soit  $\|\cdot\|^*$  une norme sur  $\Lambda^m TV$ . Un courant est dit de masse finie (relativement à  $\|\cdot\|^*$ ) si

$$\sup\{S(\phi) : \phi \in \mathcal{D}^m(V), \|\phi\|_\infty \leq 1\} < +\infty.$$

Si pour tout compact  $K \subset V$ ,

$$\sup\{S(\phi) : \phi \in \mathcal{D}^m(V), \text{supp}(\phi) \in K, \|\phi\|_\infty \leq 1\} < +\infty,$$

alors on dit que  $S$  est localement de masse finie.

*Remarque 2.19.* Être localement de masse finie ne dépend pas de la norme. Les courants représentables par intégration sont les courants localement de masse finie : il vérifient (2.16) pour les constantes sur les compacts, qui sont de norme sup bornée pour toutes les normes sur  $\Lambda^m TV$ .

**Définition 2.20.** Etant données deux normes sur  $\Lambda^{m-1}TV$  et  $\Lambda^m TV$  Un courant  $S \in \mathcal{D}_m(V)$  est normal (resp. localement normal) si  $S$  et  $\partial S$  sont de masse finie (resp. localement de masse finie).

Pour les variétés compactes, les deux notions de courant normal ou localement normal coïncident, et ne dépendent pas des norme placées sur  $\Lambda^{m-1}TV$  et sur  $\Lambda^m TV$ .

*Exemple 2.21.* Le courant d'intégration sur une sous-variété compacte  $W$  orientée à bord, est de masse finie. En effet  $I_W$  et  $I_{\partial W}$  sont représentables par intégration ; de plus  $\partial W$  est fermé dans  $W$ , donc compact, donc  $I_{\partial W}$  est de masse finie.

On définit à présent la notion de masse relativement à une densité. A cette occasion, on reprend et généralise légèrement la construction effectuée au paragraphe 4.15 de [Gro07] pour

les densités riemanniennes :

**Définition 2.22.** Supposons  $V$  muni d'une  $m$ -densité  $F$  telle que  $F(\xi)_x = 0 \implies \xi_x = 0$ . On équipe successivement :

— Le fibré  $\Lambda_m TV$  de la norme masse, définie sur la fibre au-dessus de  $x \in V$  par

$$\mathcal{M}_x(\xi) := \inf \left\{ \sum F_x(\zeta) : \xi = \sum \zeta, \zeta \text{ indecomposable} \right\}; \quad (2.23)$$

— Le fibré  $\Lambda^m TV$ , de la norme co-masse

$$\mathcal{M}_x^*(\tau) := \sup \{ \tau(\xi) : \mathcal{M}_x(\xi) \leq 1 \}; \quad (2.24)$$

— L'espace  $\mathcal{D}^m(V)$ , de la norme co-masse

$$\mathbf{M}^*(\phi) = \sup_{x \in V} \mathcal{M}_x^*(\phi_x) := \sup |\omega(\tau)|; \quad (2.25)$$

où  $\tau$  est une section continue du fibré  $\Lambda_m TV$  qui est de masse  $\leq 1$  dans chaque fibre <sup>11</sup>.

— Finalement, l'espace des courants de masse finie relativement à  $\mathcal{M}^*$ , de la masse

$$\mathbf{M}(T) = \sup \{ T(\phi) : \mathbf{M}^*(\phi) \leq 1 \}. \quad (2.26)$$

*Remarque 2.27* (Masse des courants d'intégration dans les variétés riemanniennes). Si  $V$  est riemannienne, la masse du courant d'intégration sur une hypersurface compacte  $W$  relativement à l'intégrand riemannien est égale à son volume riemannien. Ceci résulte de la proposition 1.28, et vaut aussi pour les courbes  $\mathcal{C}^1$  : la masse du courant d'intégration est égale à la longueur riemannienne. En revanche, ce n'est pas vérifié pour les sous-variétés dont dimension et co-dimension sont supérieures ou égales à 2.

*Exemple 2.28.* Soit  $V$  une variété munie d'une structure  $\mathcal{J}$  presque complexe,  $h$  une métrique hermitienne pour  $\mathcal{J}$ ,  $\Omega$  sa 2-forme fondamentale. Pour tout champ de 2-vecteurs simple  $\xi$  sur  $V$ , si l'on décompose  $\xi$  sous la forme  $\xi_1 \wedge \xi_2$  alors

$$\langle \xi, \Omega \rangle = \Omega(\xi_1, \xi_2) = h(\mathcal{J}\xi_1, \xi_2) \leq \|\xi_1\|_h \|\xi_2\|_h, \quad (2.29)$$

avec égalité si et seulement si  $\xi_2 = \mathcal{J}(x_1)$ . En particulier, sur une variété kählerienne, la co-masse de la forme de Kähler est égale à 1. Plus généralement, l'inégalité de Wirtinger (cf. [Fed69, p.40] pour la métrique hermitienne standard de  $\mathbb{C}^m$ ) donne  $\mathbf{M}^*(\Omega^{\wedge \mu}) = \mu!$ .

*Remarque 2.30* ([Fed69], p.357). L'usage d'une norme co-masse associée à un intégrand  $F$  dans la définition de  $\|S\|$  pour le théorème de représentation 2.15 entraîne que  $\mathcal{M}(\tilde{S}) = 1$ ,  $\|S\|$ -presque partout, pour  $\mathcal{M}$  la masse ponctuelle associée à  $F$ .

**Définition 2.31** (Norme  $\mathbf{N}$ ). Soit  $T$  un courant normal, on définit sa norme  $\mathbf{N}$  par

$$\mathbf{N}(T) := \mathbf{M}(T) + \mathbf{M}(\partial T) \quad (2.32)$$

---

11. Pour vérifier l'égalité, reproduire la preuve de la proposition 1.31

### 2.2.2 Topologie $\flat$

On suppose  $V$  munie d'un couple de densités en degré  $m$  et  $m + 1$ . On rappelle que ceci induit des normes co-masse  $\mathbf{M}_m^*$  et  $\mathbf{M}_{m+1}^*$  sur les  $m$ -formes et les  $m + 1$ -formes respectivement, cf. (2.25). Soit  $K \subset V$  un compact. On définit la semi-norme <sup>12</sup>  $\flat$  sur les cochaînes par

$$\|\phi\|_K^\flat = \sup(\mathbf{M}_{m,K}^*(\phi), \mathbf{M}_{m+1,K}^*(d\phi)) \quad (2.33)$$

où la présence de  $K$  en indice signale que que le supremum dans la définition (2.25) est seulement pris sur  $K$ .

**Définition 2.34** (Norme  $\flat$  sur les chaînes, [Fed69], 4.1.12). Avec les données précédentes, soit  $T \in \mathcal{D}_m(V)$ . On pose

$$\|T\|_{K,\flat} = \sup \left\{ T(\phi) : \phi \in \mathcal{D}^m(V), \|\phi\|_K^\flat \leq 1 \right\} \quad (2.35)$$

Cette quantité est possiblement infinie. L'espace des courants (dits chaînes  $\flat$ , en anglais "flat chain") pour lesquels elle est finie pour tout  $K$  est nommé  $\mathbf{F}(V)$  et normé par  $\|\cdot\|_\flat$ .

**Proposition 2.36.** Avec les notations précédentes,

$$\|T\|_{K,\flat} = \inf \{ \mathbf{M}(R) + \mathbf{M}(S) : T \in \mathcal{D}_m(V), S \in \mathcal{D}_{m+1}(V), \text{spt}(S) \subset K \} \quad (2.37)$$

De plus, si  $T$  est une chaîne  $\flat$  (i.e. si les membres de cette égalité sont finis) alors la borne inférieure est atteinte.

En pratique, on utilisera (2.37) comme une seconde définition. En codimension non nulle, la topologie  $\flat$  est moins fine que celle induite par la norme  $\mathbf{M}$ . Ceci est illustré sur la figure 6.

*Démonstration.* On reprend la preuve de [Fed69], p. 367-368. Soit  $S \in \mathcal{D}_{m+1}(V)$  à support dans  $K$ . Alors pour tout  $\phi \in \mathcal{D}^m(V)$ ,

$$\begin{aligned} T(\phi) &= (T - \partial S)\phi + S(d\phi) \\ &\leq \mathbf{M}(T - \partial S)\mathbf{M}_{K,m}^*(\phi) + \mathbf{M}(S)\mathbf{M}_{K,m+1}^*(d\phi) \\ &\leq (\mathbf{M}(T - \partial S) + \mathbf{M}(S)) \|\phi\|_K^\flat \end{aligned}$$

ce qui fournit une inégalité. Inversement, supposons que  $T$  est une chaîne  $\flat$ . On munit l'espace produit  $P = \mathcal{D}^m(V) \times \mathcal{D}^{m+1}(V)$  de la semi-norme sup des semi-normes co-masse sur  $K$  en degré  $m$  et  $m + 1$  :

$$\nu(\phi, \psi) = \sup(\mathbf{M}_{m,K}^*(\phi), \mathbf{M}_{m+1,K}^*(\psi)),$$

et on définit  $Q : \mathcal{D}^m(V) \rightarrow P$  qui à  $\phi$  associe le couple  $(\phi, d\phi)$ . Par définition (2.33) de la semi-norme  $\|\cdot\|_K^\flat$ ,  $\nu(Q(\phi)) = \|\phi\|_K^\flat$ . Sur l'image de  $Q$  et par définition de  $\|\cdot\|_\flat$ , la forme linéaire  $T \circ Q^{-1}$  est bornée par  $\|T\|_\flat \nu$ . D'après le théorème de Hahn-Banach, on peut l'étendre en  $L$  définie sur tout  $P$ , et telle que  $|L(\phi, \psi)| \leq \|T\|_\flat \nu(\phi, \psi)$  On pose alors  $R$  et  $S$  les applications partielles de  $L$  :

$$R(\phi) := L(\phi, 0);$$

$$S(\psi) := L(0, \psi).$$

---

12. La notation musicale  $\flat$  est dûe à Whitney [Whi57], qui pratiquait le violon et le viola [Che94].

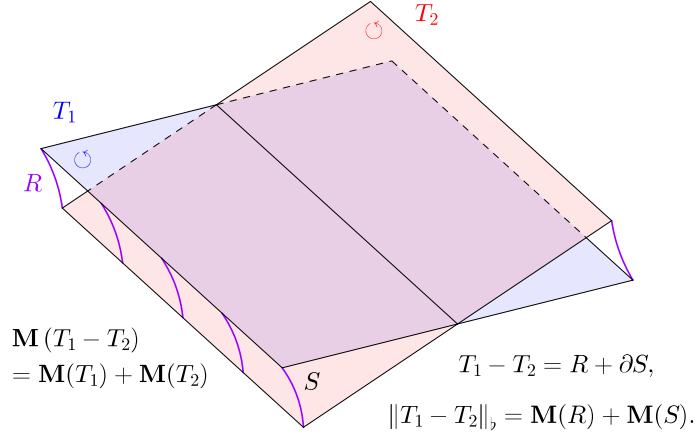


FIGURE 6 – En codimension  $> 0$ , deux courants proches en distance  $b$  mais lointains pour la distance masse (seul le support de  $R$  est figuré, en violet).

Alors  $T = R + \partial S$  étant donné que  $L \circ Q = T$  sur  $\mathcal{D}_m(V)$ . Pour tout  $(\phi, \psi)$  tel que  $\nu(\phi, \psi) \leq 1$ , que  $R(\phi) + S(\psi) = L(\phi, \psi) \leq \|T\|_b \nu(\phi, \psi)$ . On en déduit que  $M(R) + M(S) \leq \|T\|_b$ , ce qui termine la preuve.  $\square$

*Remarque 2.38.* Si  $T$  est une chaîne  $b$  de masse finie que l'on décompose sous la forme  $R + \partial S$ , avec  $\|T\|_b = M(R) + M(S)$ , alors  $S$  est un courant normal. En effet  $M(S) < +\infty$  et  $M(\partial S) \leq M(T) + M(R)$ . Ce fait joue un rôle important dans les preuves ultérieures (où l'on applique des théorèmes de tranches sur les courants interpolateurs).

## 2.3 Intégralité

### 2.3.1 Définitions

A ce stade, il y a deux motivations pour dégager une notion de courants entiers :

1. Les inégalités isopérimétriques de la partie 1 pour des domaines à bord  $C^1$  ne sont pas  $\mathbb{R}$ -linéaires, alors que l'opérateur de bord sur les courants l'est. Par conséquent, on ne peut pas espérer une généralisation à des  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels de courants. Un degré de généralisation classique dans la littérature (par exemple [BM94, FMP10]) est celui de domaine à périmètre localement fini. Pour nous, cela correspondra aux courants entiers de multiplicité 1 dont le bord est de masse localement finie.
2. Il est utile de retrouver l'homologie à coefficients entiers (ceci sera évoqué dans 2.4), ce qui fait sentir le besoin de dégager une notion de chaînes entières dans les espaces de courants. De telles chaînes doivent former des  $\mathbb{Z}$ -modules et être stables par l'opérateur de bord.

Soit  $V$  une variété de dimension  $n$ ,  $K \subset V$  un compact et  $m \leq n$  un entier.

**Définition 2.39** ([Fed69] 4.1.24). *On définit successivement :*

- Le groupe  $\mathcal{R}_{m,K}(V)$  des courants rectifiables, comme l'adhérence pour la norme  $\mathbf{M}$  du groupe des chaînes lipschitziennes singulières entières<sup>13</sup> à support dans  $K$ .
- Le groupe des courants entiers  $\mathbf{I}_{m,K}(V)$ , par

$$\mathbf{I}_{m,K}(V) = \{T \in \mathcal{D}_{m,K}(V) : T \in \mathcal{R}_{m,K}(V) \text{ et } \partial T \in \mathcal{R}_{m-1,K}(V)\}.$$

- Le groupe des chaînes  $\flat$  entières, par

$$\mathcal{F}_{m,K}(V) = \{R + \partial S : R \in \mathcal{R}_{m,K}(V), S \in \mathcal{R}_{m+1,K}(V)\}.$$

Finalement,  $\mathcal{R}_m(V)$  (resp.  $\mathbf{I}_m(V)$ ,  $\mathcal{F}_m(V)$ ) est défini comme la réunion des  $\mathcal{R}_{m,K}(V)$  (resp.  $\mathbf{I}_{m,K}(V)$ ,  $\mathcal{F}_{m,K}(V)$ ) via les inclusions naturelles  $\mathcal{D}_{m,K}(V) \rightarrow \mathcal{D}_m(V)$ , pour tout  $K$  compact.

*Remarque 2.40.* Pour [Pan99], un courant entier est par définition un courant dans l'adhérence pour la norme  $\flat$  du groupe engendré par les courants d'intégration sur des sous-variétés compactes à bord orientées. L'équivalence de cette définition avec celle donnée en 2.39 n'est pas immédiate. Toutefois, dans un espace vectoriel il est possible de la déduire du théorème de fermeture [Fed69, 4.2.16] de Federer, ainsi que d'une version améliorée de notre corollaire 2.47 au théorème de déformation.

### 2.3.2 Compacité et approximation

Le théorème suivant, dit de déformation, est une traduction de [Fed69, 4.2.9] (il a été originellement obtenu dans [FF60]).

**Théorème 2.41** (Federer, Fleming). *Soit  $R$  un espace vectoriel de dimension  $n$  muni de densités en degré  $m$  et  $m+1$  pour un entier  $m$  tel que  $0 < m < n$ . Soit  $T$  un courant normal de dimension  $m$  sur  $R$ , et  $\varepsilon > 0$ . Il existe  $P$  une chaîne simpliciale réelle<sup>14</sup> de dimension  $m$ ,  $Q, S$  des courants normaux de dimensions respectives  $m$  et  $m+1$ , ainsi que des constantes  $\gamma$  et  $\delta$  tels que*

$$T = P + Q + \partial S,$$

avec les estimées suivantes sur les masses de  $P, Q, S$  et de leurs bords :

$$\varepsilon^{-m} \mathbf{M}(P) \leq \gamma (\varepsilon^{-m} \mathbf{M}(T) + \varepsilon^{-m+1} \mathbf{M}(\partial T)) \quad (2.42)$$

$$\varepsilon^{-m+1} \mathbf{M}(\partial P) \leq \varepsilon^{-m+1} \gamma \mathbf{M}(\partial T) \quad (2.43)$$

$$\varepsilon^{-m} \mathbf{M}(Q) \leq \gamma \varepsilon^{-m+1} \mathbf{M}(\partial T) \quad (2.44)$$

$$\varepsilon^{-m-1} \mathbf{M}(S) \leq \gamma \varepsilon^{-m} \mathbf{M}(T) \quad (2.45)$$

*Si, de plus,  $T$  est un courant entier, alors la chaîne simpliciale  $P$  peut être prise entière et pour  $Q, S$  des courants entiers.*

13. Par définition, les chaînes lipschitziennes entières sur  $V$  sont les combinaisons entières de courants d'intégration sur des simplexes orientés de  $\mathbb{R}^m$ , poussés en avant par des applications lipschitziennes. On ne précise pas de structure finslérienne sur  $V$  pour parler d'application lipschitzienne, ce n'est pas nécessaire car les supports des applications sont compacts.

14. [Fed69] utilise la terminologie de chaîne polyédrale.



*Remarque 2.46.* Plus précisément, la chaîne  $P$  fournie par le théorème de Federer est à support compris dans le  $m$ -squelette d'une subdivision de  $R$  en parallélotopes. De plus,

**Corollaire 2.47.** *Soit  $R$  un espace vectoriel et  $m$  un entier, qui vérifient les mêmes hypothèses que dans le théorème. Les chaînes simpliciales entières de dimension  $m$  sur  $K$  sont denses dans les courants entiers de dimension  $m$  sur  $K$ , pour la topologie  $\flat$ .*

*Démonstration.* Soit  $T$  un courant entier sur le compact  $K \subset R$ . Reprenons les notations du théorème 2.41. Pour tout  $\varepsilon > 0$  on peut trouver  $P$  est une chaîne simpliciale sur  $K$  telle que  $T - P = Q + \partial S$ , avec d'après les estimées (2.44) et (2.45),  $\mathbf{M}(Q) + \mathbf{M}(S) \leq \gamma\varepsilon\mathbf{M}(T)$ . D'après la proposition 2.36,  $\|T - P\|_{\flat} \leq \gamma\varepsilon\mathbf{M}(T)$ .  $\square$

La version complète du théorème de déformation de Federer et Fleming donnerait un peu mieux : l'adhérence pour  $\mathbf{M}$  du groupe des chaînes simpliciales entières est exactement le groupe des courants rectifiables sur  $R$  (indépendamment, ceci découle aussi du théorème [Fed69, 4.1.28] de caractérisation géométrique des courants rectifiables). Nous admettrons aussi le théorème suivant concernant les courants entiers, dont la preuve s'appuie principalement sur le théorème de déformation <sup>15</sup>.

**Théorème 2.48** (Théorème de compacité, [Fed69] 4.2.17). *Soit  $K$  un compact de  $V$ , qui est un rétract lipschitzien d'un de ses voisinages dans  $V$ . Alors pour toute constante  $c \geq 0$ ,  $\mathbf{I}_{m,K}(V) \cap \{T : \mathbf{N}(T) \leq c\}$  est compact pour la norme  $\flat$ .*

En particulier, pour toute suite  $(T_i)$  de courant entiers à support dans un même compact, de norme  $\mathbf{N}$  uniformément bornée, il existe une extraction  $T_{i_k}$  et un courant entier  $T$  à support dans ce même compact tel que  $T_{i_k} \rightarrow_{\flat} T$ .

*Remarque 2.49.* La conclusion du théorème de Federer est en fait plus forte : la compacité a lieu pour une norme  $\flat$  adaptée au chaînes  $\flat$  entières

$$\|T\|_{\flat, \mathbb{Z}} = \inf \{ \mathbf{M}(R) + \mathbf{M}(S) : R \in \mathcal{R}_{m,K}(V), S \in \mathcal{R}_{m+1,K}(V), T = R + \partial S \},$$

qui est plus fine. Nous n'utiliserons pas cette norme.

## 2.4 Homologie des courants

On supposera dans toute cette section que  $V$  est compacte (ceci permet entre autres de donner une forme plus simple à la dualité de Poincaré).

On désigne par  $\mathcal{Z}_m(V)$  le groupe des cycles de  $\mathcal{D}_m(V)$  et  $\mathcal{B}_m(V)$  le sous-groupe des bords. Les groupes d'homologie du complexe des courants sont les quotients  $H_m^{(\mathcal{D}_*)}(V)$ . On peut montrer (par exemple à l'aide de 2.50 qui suit et du théorème de de Rham) que ce complexe calcule effectivement l'homologie de la variété. Toutefois la définition des groupes  $H_m^{(\mathcal{D}_*)}(V)$  est peu praticable directement : les espaces de cycles comme de bords sont très vastes, il est donc utile de trouver des sous-complexes de  $(\mathcal{D}_*, \partial D)$  induisant la même homologie. A titre d'exemple, nous allons montrer que c'est le cas du complexe des courants étalés définis en 2.1.2).

---

15. Il y a deux ingrédients dans la preuve : le théorème de clôture [Fed69] 4.2.16 ( $\mathbf{I}_{m,K}(V)$  est  $\flat$  fermé dans l'espace des courants normaux de dimension  $m$ ), qui donne la complétude, et la conséquence précise du théorème de déformation, qui donne la pré-compacité.

### 2.4.1 Régularisation

Nous avons défini en 2.1.2 la famille des courants étalés, et vu dans la proposition 2.9 que les opérateurs de bords pour les courants et les formes se correspondent au signe près. Il y a des inclusions naturelles (une fois définie une orientation sur  $V$ )  $\mathcal{Z}^{n-m}(V) \hookrightarrow \mathcal{Z}_m(V)$  et  $\mathcal{B}^{n-m}(V) \hookrightarrow \mathcal{B}_m(V)$ .

**Théorème 2.50.** *Il existe des opérateurs  $R : \mathcal{D}_m(V) \rightarrow \mathcal{D}^{n-m}(V)$  et  $A : \mathcal{D}_m(V) \rightarrow \mathcal{D}_{m+1}(V)$  tels que*

$$R - \text{Id} = \partial \circ A + A \circ \partial, \quad (2.51)$$

où l'on a utilisé implicitement l'inclusion naturelle  $\mathcal{D}^{n-m}(V) \hookrightarrow \mathcal{D}_m(V)$  pour pouvoir écrire  $R - \text{Id}$ .

De plus,  $R - \text{Id}$  peut être pris arbitrairement petit, dans le sens que nous préciserons à la fin de la preuve.  $R$  est appelé opérateur de régularisation et  $A$  opérateur d'homotopie.

**Corollaire 2.52.** *L'inclusion  $\mathcal{D}^*(V) \hookrightarrow \mathcal{D}_{n-*}(V)$  définie en 2.1.2 induit un isomorphisme*

$$H_{dR}^*(V) \xrightarrow{\sim} H_{n-*}^{(\mathcal{D}^*)}(V).$$

*Preuve du corollaire 2.52.* Cette preuve provient de [LL11]. Soit  $\gamma : H_{dR}^*(V) \rightarrow H_{n-*}^{(\mathcal{D}^*)}(V)$  l'application induite par  $\phi \mapsto C_\phi$ . On se donne  $R$  et  $A$  fournis par le théorème.

(i) *Surjectivité de  $\gamma$  :* Soit  $T \in \mathcal{Z}_m(V)$ ; on cherche  $\alpha \in \mathcal{Z}^{n-m}(V)$  et  $S$  tel que  $T$  est homologue à  $\alpha$ , soit  $\alpha$  et  $S$  tels que  $T = C_\alpha + \partial S$ . On pose  $\alpha = R(T)$  et  $S = A(T)$ . Alors  $\gamma(\alpha) = T$ .

(ii) *Injectivité de  $\gamma$  :* Soit  $\alpha \in \mathcal{Z}^{n-m}$  telle qu'il existe un courant  $T$  avec  $C_\alpha = \partial T$  (autrement dit le courant étalé  $C_\alpha$  est un bord). Alors d'après (2.11),

$$R(\alpha) = R(\partial T) = (-1)^{n-m+1} dR(T).$$

D'après (2.51),  $R(\alpha) - \alpha = (-1)^{n-m} dA(\alpha)$  d'où  $\alpha = (-1)^{n-m+1} d(R(T) + A(\alpha))$ . Donc  $\alpha \in \mathcal{Z}^{n-m}(V)$ .  $\square$

*Démonstration du théorème 2.50.* On se contente d'une preuve simplifiée dans le cas où  $V$  possède une structure de groupe de Lie abélien (i.e. pour nous quand  $V$  est un tore, vue notre hypothèse de compacité). Le cas général est dû à de Rham (on pourra consulter le chapitre 4 du cours [LL11] pour une preuve complète). Nous procédons ici par convolution, en s'inspirant de [Fed69], 4.1.2 et 4.1.18. On désigne par  $(z, x) \mapsto z.x$  l'opération du groupe de Lie  $\tilde{V}$  sur  $V$  par translations. Soit  $\lambda$  une forme volume sur  $\tilde{V}$  invariante par translation, positive pour l'orientation issue de celle de  $V$ . On se donne  $\varphi$  lisse à support compact, positive, telle que  $\int_{\tilde{V}} \varphi \lambda = 1$ . On définit l'opérateur de régularisation  $R$  par

$$(RT)(\psi) = T(\varphi * \psi) = T \int_{\tilde{V}} \varphi(-z) \tau_{z*}(\psi) d\lambda(z) \quad (2.53)$$

Pour tout  $z \in \tilde{V}$ , soit  $H^z$  l'application  $\mathbb{R} \times \tilde{V} \rightarrow V$ , qui à  $(t, x)$  associe  $tz.x$ . On désigne par  $S$  le courant d'intégration  $I_{[0,1]}$  sur  $\mathbb{R}$  orienté positivement, puis on définit l'opérateur

d'homotopie  $A$  comme suit : pour tout  $\Psi \in \mathcal{D}_{m+1}(V)$ ,

$$(AT)\Psi = \int_{\tilde{V}} \varphi(-z) [H_{\sharp}^z(S \times T)] \Psi d\lambda(z),$$

où  $S \times T$  est le courant produit cartésien sur  $\mathbb{R} \times V$  défini en 2.1.1. Alors comme  $\partial S = \delta_1 - \delta_0$ , et d'après (2.7), pour tout  $\psi \in \mathcal{D}^m(V)$ ,

$$\partial(AT)\psi + A(\partial T)\psi = (RT - T)\psi.$$

Ceci est l'identité (2.51) souhaitée. Il reste à vérifier que le courant  $RT$  est étalé ; pour cela remarquons à la suite de [Fed69] 4.1.2 que  $RT = \lambda \wedge \xi$ , où  $\xi : \tilde{V} \rightarrow \Lambda_m \tilde{V}$  est défini pour tout  $z \in \tilde{V}$  par  $\langle \xi(z), \phi \rangle = T(\tau_{z*} \varphi \bar{\phi})$ , où  $\bar{\phi}$  désigne l'extension de  $\phi$  à  $\tilde{V}$ . Par dérivation sous le signe  $\int$ , on montre que  $\xi$  est lisse, donc  $RT$  est bien un courant étalé.  $\square$

*Remarque 2.54.* Soit  $\varphi$  telle que dans la preuve précédente. Pour tout  $\varepsilon > 0$ , on pose  $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \varphi(x/\varepsilon)$ . Puis,  $R_\varepsilon$  l'opérateur de régularisation  $(R_\varepsilon T)\psi = T(\varphi_\varepsilon * \psi)$ . Alors  $R_\varepsilon T \rightarrow T$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  pour la topologie faible  $\sigma(\mathcal{D}_m(V), \mathcal{D}^m(V))$ . Si  $T$  est un courant d'intégration sur une sous-variété  $W$ , le courant régularisé  $R_\varepsilon T$  est à support dans le  $\varepsilon$ -voisinage de  $W$ . Par exemple, si  $W$  est une hypersurface définie comme le lieu des zéros de  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ , où 0 est valeur régulière de  $f$ , la régularisation de  $W$  par  $R_\varepsilon$  est proche d'un multiple scalaire de  $df$  au voisinage de  $W$ .

## 2.4.2 Homologies des complexes de chaînes $\flat$ réelles et entières

On se limite ici à l'énoncé partiel de résultats issus de [Fed69, 4.4], concernant les groupes d'homologie relative obtenus à partir de complexes de chaînes  $\flat$  réelles et entières définies respectivement en 2.2.2 et 2.3.1. Dans tout ce qui suit,  $V$  est une variété différentielle lisse et compacte de dimension  $n$  et  $W \subset V$  une sous-variété fermée. D'après le théorème de plongement de Whitney,  $V$  est un rétracte d'un voisinage d'un de ses plongements dans  $\mathbb{R}^n$  pour  $n$  assez grand, et la rétraction peut être choisie lipschitzienne ; de même pour  $W$  (voir [Hat02, cor A.9] pour le raisonnement détaillé). Donc, la théorie développée en [Fed69, 4.4] s'applique.

**Définition 2.55.** On définit le groupe des cycles  $\flat$  entiers (resp. réels) par

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_m(V, W) &:= \{T \in \mathcal{F}_m(V), \text{spt}(\partial T) \subset W \text{ ou } m = 0\}, \\ \text{resp. } \mathbf{Z}_m(V, W) &:= \{T \in \mathbf{F}_m(V), \text{spt}(\partial T) \subset W \text{ ou } m = 0\}. \end{aligned}$$

ainsi que le groupe des bords  $\flat$  entiers (resp. réels) par

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_m(V, W) &:= \{T + \partial S : T \in \mathcal{F}_m(V), S \in \mathcal{F}_{m+1}(V), \text{spt}(T) \subset W\}, \\ \text{resp. } \mathbf{B}_m(V, W) &:= \{T + \partial S : T \in \mathbf{F}_m(V), S \in \mathbf{F}_{m+1}(V), \text{spt}(T) \subset W\}. \end{aligned}$$

Puis, les groupes d'homologie relative sont définis par

$$\mathbb{H}_{m,\flat}(V, W, \mathbb{Z}) = \mathcal{Z}_m(V, W) / \mathcal{B}_m(V, W) \quad ; \quad \mathbb{H}_{m,\flat}(V, W, \mathbb{R}) = \mathbf{Z}_m(V, W) / \mathbf{B}_m(V, W),$$

et toute application lipschitzienne  $f : (V_1, W_1) \rightarrow (V_2, W_2)$  respectant les inclusions  $W_i \subset V_i$  induit via  $f_{\sharp}$  une application  $H_{m,b}(f)$  en homologie. On vérifie alors ([Fed69] 4.4.1) que les foncteurs  $H_{*,b}(-, \mathbb{Z})$  et  $H_{*,b}(-, \mathbb{R})$  vérifient tous les axiomes d'Eilenberg et Steenrod pour une théorie homologique (non réduite) avec connectant  $\partial : \mathbf{H}_{m,b}(U, V) \rightarrow \mathbf{H}_{m-1,b}(V, W)$  pour  $U \supset V \supset W$ , induit par l'opérateur de bord sur les groupes de cycles  $b$ , et groupe de coefficients  $\mathbb{Z}$  (resp.  $\mathbb{R}$ ). Du théorème d'Eilenberg et Steenrod caractérisant ces foncteurs à équivalence naturelle près résulte alors le

**Théorème 2.56.** *Les groupes  $H_{m,b}(V, W)$  et les groupes d'homologie singulière relative  $H_m(V, W)$  sont isomorphes via un isomorphisme naturel*<sup>16</sup>.

En particulier,

1. Le groupe  $H_{m,b}(V, W, \mathbb{Z})$  est de type fini<sup>17</sup>.
2. L'espace vectoriel  $H_{m,b}(V, W, \mathbb{R})$  est de dimension finie.

Le second point est lié au théorème isopérimétrique de Federer et Fleming (qui implique notamment la finitude de  $\dim H(V, W, \mathbb{R})$  sous des hypothèses plus générales pour  $V$  et  $W$  que les nôtres). Nous utiliserons ce lien pour établir l'inégalité isopérimétrique relative 4.53 à partir du théorème 2.56.

---

16. L'isomorphisme naturel revient à interpréter la chaîne (disons, lisse par morceaux) élémentaire  $f : (\sigma, \partial\sigma) \rightarrow (V, W)$  comme le courant  $f_{\sharp}\sigma$  où  $\sigma$  est le simplexe élémentaire orienté.

17. Ceci est aussi la conséquence du théorème isopérimétrique de Federer et Fleming [Fed69] 4.2.2(4).

### 3 Normes sur les groupes d'homologie

Une norme sur un sous-espace des chaînes représentant tous les cycles induit une semi-norme quotient sur les groupes d'homologie, en attribuant à chaque classe la plus petite norme d'un représentant. C'est le principe général permettant de normer les groupes d'homologie et de cohomologie ; on verra les exemples principaux en 3.1 et 3.2. Toutefois il n'est pas clair que les constructions de normes par dualité au niveau chaînes-cochaînes (telles que nous avons pu en effectuer dans la définition 2.22) donnent encore des normes duales au niveau des groupes d'homologie et de cohomologie. On montrera en 3.3 que cela peut encore être valable.

#### 3.1 La norme stable $\|\cdot\|_{\mathbb{R}}$

##### 3.1.1 Définition

D'après le théorème 2.50 de régularisation, tout cycle contient dans sa classe d'homologie un courant de masse finie. Ceci-permet de définir la norme stable sur les groupes d'homologie comme suit.

**Définition 3.1.** On définit la semi-norme  $\|\cdot\|_{\mathbb{R}}$ , dite norme stable, sur  $H_m(V, \mathbb{R})$  par

$$\|\eta\|_{\mathbb{R}} = \inf \{ \mathbf{M}(C) : C \in \eta \}. \quad (3.2)$$

De même, on définit sur le groupe  $H_m(V, \mathbb{Z})$  la fonction  $\|\cdot\|_{\mathbb{Z}}$  par :

$$\|\alpha\|_{\mathbb{Z}} = \inf \{ \mathbf{M}(\gamma) : \gamma \in \alpha \}. \quad (3.3)$$

Les deux normes  $\|\cdot\|_{\mathbb{R}}$  et  $\|\cdot\|_{\mathbb{Z}}$  amènent une comparaison. Le théorème des coefficients universels établit l'isomorphisme canonique

$$H_m(V, \mathbb{R}) = H_m(V, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}.$$

En particulier, si  $H_m(V, \mathbb{Z})$  est sans torsion, il se réalise comme un réseau dans  $H_m(V, \mathbb{R})$ . Soit alors  $\gamma$  une chaîne entière fermée ; c'est a fortiori une chaîne réelle fermée, et il y a inclusion de la classe entière  $[\gamma]_{\mathbb{Z}}$  de  $\gamma$  dans la classe réelle  $[\gamma]_{\mathbb{R}}$ , d'où l'inégalité :

$$\|[\gamma]_{\mathbb{Z}}\|_{\mathbb{Z}} \geq \|[\gamma]_{\mathbb{R}}\|_{\mathbb{R}}. \quad (3.4)$$

Il n'y a pas égalité dans 3.4 a priori, en particulier parce que rien n'assure que  $\|\cdot\|_{\mathbb{Z}}$  est homogène. Néanmoins, quand  $V$  est riemannienne, on peut montrer qu'il s'agit de la seule objection : la restriction de  $\|\cdot\|_{\mathbb{R}}$  au réseau  $H_m(V, \mathbb{Z})$  peut être reconstruite à partir de  $\|\cdot\|_{\mathbb{Z}}$  comme suit :

**Théorème 3.5** ([Fed74]). On suppose  $V$  riemannienne, et la masse  $\mathbf{M}$  définie à partir de la densité riemannienne. Soit  $\alpha$  une chaîne entière fermée. Alors

$$\|\alpha_{\mathbb{R}}\|_{\mathbb{R}} = \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{\|p\alpha\|_{\mathbb{Z}}}{p} \quad (3.6)$$

Autrement dit, la norme stable  $\|\cdot\|_{\mathbb{R}}$  est obtenue comme la norme limite associée à  $\|\cdot\|_{\mathbb{Z}}$ .

*Remarque 3.7.* Il est possible, mais plutôt difficile, de montrer que  $\|\cdot\|_{\mathbb{R}}$  est bien une norme (et pas seulement une semi-norme) sous l'hypothèse que la densité utilisée est convexe et strictement positive. Ceci peut se faire en montrant que l'infimum dans (3.2) est alors atteint dans chaque classe d'homologie réelle, ce qui découle de la proposition 3.9 dans [Fed74]. Si  $\|\cdot\|_{\mathbb{R}}$  est une norme, alors on obtient aussi  $\|\alpha\|_{\mathbb{Z}} = 0 \implies \alpha = 0$  via l'inégalité (3.4); mais sous la même hypothèse sur la densité, ce fait découle plus simplement de [Fed69] 5. 6 p. 522. On appelle systole de  $V$  en degré  $m$ , notée  $\text{syst}_m(V)$  la plus petite masse d'une classe d'homologie entière non nulle de  $V$  en degré  $m$ . Si  $V$  est riemannienne, on peut chercher à majorer  $\text{syst}_1(V)/\text{Vol}(V)^{1/n}$  sous des conditions seulement topologiques. On appelle un tel résultat inégalité isosystolique; des exemples pour les surfaces sont donnés dans [Gro07], 4 A.

Si  $V$  est une variété riemannienne connexe, la norme stable sur  $H_1(V, \mathbb{R})$  a un lien avec la norme géométrique sur le groupe fondamental, que nous allons décrire.

### 3.1.2 Norme stable et normes géométriques

Soit  $V$  une variété riemannienne connexe,  $v$  dans  $V$  un point base. On dispose d'un morphisme  $\mathfrak{H}$  du groupe  $\mathcal{L}(v, V)$  des lacets lisses par morceaux basés en  $v$  vers le groupe des cycles  $\mathcal{Z}_1(V)$  qui à  $\gamma \in \mathcal{L}(v, V)$  associe le courant  $\hat{\gamma}_{\#} I_{[S^1]}$  où  $\hat{\gamma}$  est le reparamétrage à vitesse constante. Si la classe de  $\gamma$  est neutre dans  $\pi_1(v, V)$  alors il existe  $\Gamma : B^1 \rightarrow V$  qui étend  $\hat{\gamma}$  sur la boule unité :  $\hat{\gamma} = \Gamma|_{\partial B}$ . Mais alors

$$\hat{\gamma}_{\#} I_{[S^1]} = \pm \partial \{ \Gamma_{\#} I_{[B]} \} \in \mathcal{B}_1(V).$$

Ceci permet de construire le morphisme de Hurewicz :

$$h : \pi_1(V, v) \rightarrow H_1(V, \mathbb{Z}),$$

qui à  $[\gamma]$  associe  $\mathfrak{H}(\gamma)$ . Ce morphisme est surjectif (par la connexité de  $V$ ) et son noyau est exactement le sous-groupe dérivé de  $\pi_1(V)$ .

De manière similaire à la définition de  $\|\cdot\|_{\mathbb{Z}}$ , on équipe le groupe fondamental  $\pi_1(v, V)$  de normes géométriques relatives à un point base :

**Définition 3.8.** *Le groupe  $\pi_1(v, V)$  est muni de la norme géométrique ([Gro07] 2.21) :*

$$\|\gamma\|_{\text{geo}} := \text{dist}_{\hat{\gamma}}(\tilde{v}, \alpha.\tilde{v}) = \inf \{ \text{long}(\alpha) : \alpha \in \gamma \}. \quad (3.9)$$

*Ainsi que de la norme géométrique limite :*

$$\|\gamma\|_{\text{lim}} := \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{\|\alpha^p\|_{\text{geo}}}{p}. \quad (3.10)$$

A la différence de  $\|\cdot\|_{\text{geo}}$ ,  $\|\cdot\|_{\text{lim}}$  est  $\mathbb{Z}$ -homogène :  $\|\alpha^p\|_{\text{lim}} = |p| \|\alpha\|_{\text{lim}}$  pour tout  $p \in \mathbb{Z}$ .

La norme géométrique dépend de  $\tilde{v}$ , plus précisément de sa projection  $v$  dans  $V$ . Cependant, si l'on se donne  $\varphi_c : \pi_1(v, V) \rightarrow \pi_1(w, V)$  le morphisme associé à un segment géodésique  $c$  reliant  $w$  à  $v$ , alors les normes géométriques  $\|\cdot\|_{\text{geo}, v}$  et  $\|\cdot\|_{\text{geo}, w}$  pointées respectivement en  $v$  et  $w$  vérifient :

$$\|\gamma\|_{\text{geo}, v} - 2\text{long}(c) \leq \|\varphi_c(\gamma)\|_{\text{geo}, v} \leq \|\gamma\|_{\text{geo}, w} + 2\text{long}(c). \quad (3.11)$$

Autrement dit, les normes géométriques de  $\gamma$  et  $\varphi_c(\gamma)$  diffèrent d'une constante additive, au plus égale à  $2 \cdot \text{diam}(V)$  (en particulier, si  $v = w$ , on obtient que deux éléments conjugués ont même norme géométrique limite). Ceci permet de définir la norme limite sur  $\pi_1(V)$ ; cette norme est constante sur les classes de conjugaison.

**Distances géométriques** Même si  $\pi_1(V, v)$  n'est pas abélien,  $\|\cdot\|_{\text{geo}}$  fournit une distance  $d_v$  sur  $\pi_1(v, V)$  par  $d_v(\gamma, \gamma') = \|\gamma\gamma'^{-1}\|_{\text{geo}} = \|\gamma'\gamma^{-1}\|_{\text{geo}}$ . De même,  $\|\cdot\|_{\text{lim}}$  donne une distance sur  $\pi_1(V)$  définie par  $d(\alpha, \beta) = \|\alpha\beta^{-1}\|_{\text{lim}}$ . La distance géométrique limite sur  $\pi_1(V)$  est quasi-isométrique aux distances de mots, cf. [Gro07], 3.22.

D'après la remarque 2.27,  $\|h([\gamma])\|_{\mathbb{Z}}$  est la longueur du plus court cycle homologue à  $\gamma$ . Ceci entraîne l'inégalité

$$\|[\gamma]\|_{\text{geo}} \geq \|h(\gamma)\|_{\mathbb{Z}}.$$

La proposition suivante permet de comparer la norme géométrique sur le premier groupe d'homotopie et  $\|\cdot\|_{\mathbb{Z}}$  sur le premier groupe d'homologie.

**Proposition 3.12** ([Gro07], 4.20 1/2 bis +). *Il existe une fonction  $C : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  de limite nulle en  $+\infty$  et telle que*

$$1 \leq \frac{\|\gamma\|_{\text{geo}}}{\|h(\gamma)\|_{\mathbb{Z}}} \leq 1 + C(\|\gamma\|_{\text{geo}}). \quad (3.13)$$

*Démonstration.* Soit  $c = \lambda_1 c_1 + \dots + \lambda_p c_p$  un cycle (quasi-)minimal dans la classe d'homologie  $h(\gamma)$ . La masse totale de  $c$  peut être minorée par une quantité dépendant linéairement du nombre de cycles élémentaires disjoints  $p$  qui le composent :

$$\mathbf{M}(c) = \sum_i |\lambda_i| \mathbf{M}(c_i) \geq p \cdot \text{syst}_1(V).$$

Montrons qu'il existe une constante  $K$  qui ne dépend que de  $V$  et  $d_1, \dots, d_{p-1}$  des segments géodésiques tels que

- Les  $d_i$  connectent les  $c_i$  entre eux
- La somme totale des longueurs des  $d_i$  est majorée par  $Kp^{1-1/n}$

Étant donné que  $V$  est compacte, il existe une constante  $\kappa$  telle que pour tout  $\rho < \text{diam}(V)$ , le volume des  $\rho$ -boules géodésiques dans  $V$  est au moins  $\kappa\rho^n$ . Donnons-nous  $p$  points  $x_1, \dots, x_p$  avec  $x_i$  dans le support de  $c_i$ . Les boules géodésiques  $B(x_i, \rho)$  s'intersectent dès que  $\rho \geq (\text{Vol}(V)/p\kappa)^{\frac{1}{n}}$  car la somme de leurs volumes dépasse celui de  $V$ . Il existe donc un segment géodésique  $d_1$  reliant  $x_{i_1}$  à  $x_{i_2}$  tel que

$$\text{long}(d_1) \leq 2(\text{Vol}(V)/p\kappa)^{\frac{1}{n}}.$$

Quitte à reproduire le raisonnement en ôtant le cycle  $c_{i_1}$ , il existe  $d_2$  reliant  $x_{i_3}$  à  $x_{i_4}$  tel que  $\text{long}(d_2) \leq 2(\text{Vol}(V)/(p-1)\kappa)^{\frac{1}{n}}$ . On peut recommencer jusqu'à ce que les  $d_i$  connectent tous les cycles  $c_i$ , c.f. figure 7. Finalement

$$\sum_i \text{long}(d_i) \leq \left(\frac{\text{Vol}(V)}{\kappa}\right)^{\frac{1}{n}} \sum_{i=2}^p i^{-1/p} \leq \left(\frac{\text{Vol}(V)}{\kappa}\right)^{\frac{1}{n}} \int_1^p \frac{dx}{x^{1/n}} = Kp^{1-1/n} - K.$$

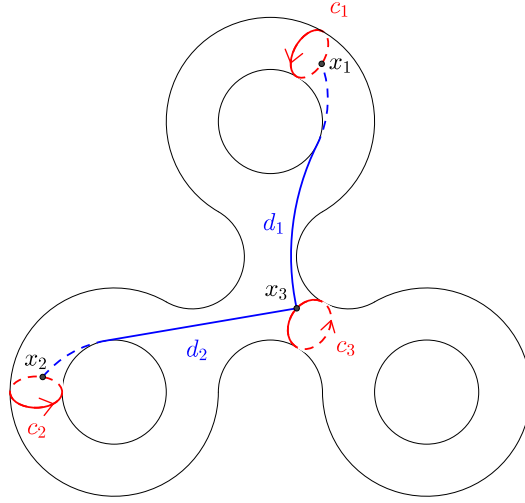


FIGURE 7 – segments géodésiques  $d_i$  connectant les cycles  $c_i$ .

On considère alors  $\gamma$  le lacet pointé en  $v \in V$  qui rejoint  $x_1$  par un segment géodésique (longueur  $\leq \text{diam}(V)$ ) parcourt  $\lambda_1$  fois le support de  $c_1$ , puis utilise un segment  $d_i$  pour rejoindre un second cycle, etc. pour finalement revenir en  $v$ . Alors  $\mathfrak{H}(\gamma) = c$ , et

$$\begin{aligned} \|\gamma\|_{\text{geo}} &\leq \text{long}(\gamma) \\ &\leq \sum_j \text{long}(d_j) + 2 \cdot \text{diam}(V) + \sum_i |\lambda_i| \text{long}(c_i) \\ &\leq K \left( \frac{\|c\|_{\mathbb{Z}}}{\text{syst}_1(V)} \right)^{1-1/n} + 2 \cdot \text{diam}(V) + \|c\|_{\mathbb{Z}} \end{aligned}$$

Les deux premiers termes du dernier membre de cette inégalité sont négligeables face à  $\|c\|_{\mathbb{Z}}$  quand celui-ci tend vers  $+\infty$ .  $\square$

### 3.1.3 Homogénéisation du revêtement maximal abélien

Soit  $V$  une variété riemannienne compacte connexe,  $\tilde{v} \in \tilde{V}$  un point du revêtement universel,  $h : \pi_1(v, V) \rightarrow H_1(V, \mathbb{Z})$  le morphisme d'Hurewicz introduit en 3.1.2 et  $\pi : H_1(V, \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(V, \mathbb{Z})/\text{tors}$ . la projection vers la composante libre de  $H_1(V, \mathbb{Z})$ . On pose  $K = \ker(\pi \circ h)$ ; il s'agit d'un sous-groupe distingué, donc on peut l'identifier à un sous-groupe de  $\pi_1(V)$ , le groupe des  $\gamma \in \pi_1(V)$  tels que  $\gamma^k \in [\pi_1(V), \pi_1(V)]$  pour un certain  $k \neq 1$ .

**Définition 3.14** (Revêtement abélien libre maximal). *On note*

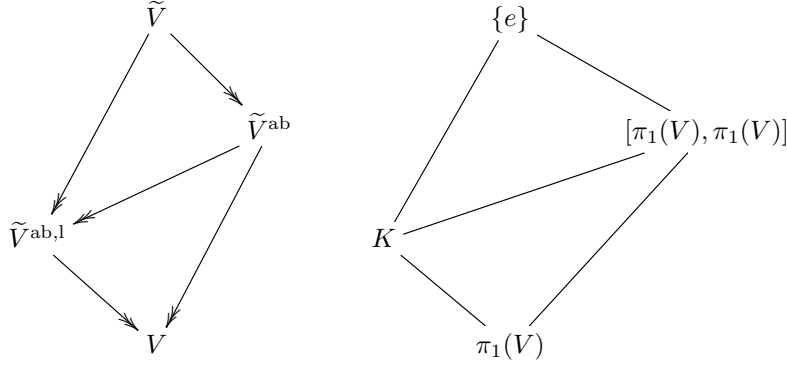
$$\tilde{V}^{\text{ab}} = [\pi_1(V), \pi_1(V)] \backslash \tilde{V},$$

resp.  $\tilde{V}^{\text{ab},1} = K \backslash \tilde{V}$ . Le revêtement  $\tilde{V}^{\text{ab}} \rightarrow V$  (resp.  $\tilde{V}^{\text{ab},1} \rightarrow V$ ) est un revêtement inter-



médiaire de  $\tilde{V} \rightarrow V$ , c'est parmi-ceux-ci le revêtement galoisien maximal dont le groupe d'automorphisme est abélien (resp. abélien et libre).

Le groupe d'automorphismes de  $\tilde{V}^{\text{ab}} \rightarrow V$  est isomorphe à  $H_1(V, \mathbb{Z})$  et celui de  $\tilde{V}^{\text{ab},1} \rightarrow V$  à  $\Gamma \simeq H_1(V, \mathbb{Z})/\text{tors.}$ .



**Exemple 3.15.** Soit  $V$  une bouteille de Klein riemannienne. Alors  $\pi_1(V) \simeq \mathbb{Z} \rtimes_{\pi} \mathbb{Z}$  avec  $\pi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq \text{Aut}(\mathbb{Z})$ ,  $\pi_1(V)^{\text{ab}} \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  et  $\Gamma \simeq \mathbb{Z}$ . Le cylindre  $\tilde{V}^{\text{ab}}$  est un revêtement à deux feuillet du ruban de Möbius  $\tilde{V}^{\text{ab},1}$ .

Soit  $\delta$  le diamètre de  $V$ . A défaut d'admettre un groupe d'isométrie transitif,  $\tilde{V}^{\text{ab},1}$  possède quand même des  $\delta$ -réseaux dans les orbites de son groupe d'isométrie. Le théorème 3.16 suivant permet d'associer à  $\tilde{V}^{\text{ab},1}$  une approximation qui est un espace homogène.

**Théorème 3.16.** Soit  $V$  une variété riemannienne compacte, on munit  $\tilde{V}^{\text{ab},1}$  de la métrique riemannienne naturelle. Pour tout  $\tilde{v} \in \tilde{V}^{\text{ab},1}$ , il y a convergence au sens de Gromov-Hausdorff de  $\lambda(\tilde{V}, \tilde{v})$  vers l'espace  $H_1(V, \mathbb{R})$  muni de la norme stable  $\|\cdot\|_{\mathbb{R}}$ , quand  $\lambda$  tend vers 0.

*Démonstration.* La preuve qui suit s'inspire de [Gro07] 3.16 et 4.22 + ; on montre la convergence de  $\rho^{-k}\tilde{V}^{\text{ab},1}$  avec  $\rho = 2$  pour simplifier. Elle s'appuie sur le lemme ([Gro07]; 3.5(b)) dont nous reproduisons ici l'énoncé :

**Lemme 3.17** (Critère de convergence Gromov-Hausdorff). Soient  $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$  des espaces métriques tels que  $\sup_k(\text{diam}(X_k)) < +\infty$ . Si pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe une suite de  $\varepsilon$ -réseaux  $N_k \subset X_k$  et un  $\varepsilon$ -réseau  $N \subset X$  tels que  $N_k \rightarrow N$  pour la distance de Lipschitz, alors  $X_k \rightarrow X$  pour la distance de Gromov-Hausdorff.

*Remarque 3.18.* Dans le cas qui nous occupe, grâce à la pré-compacité des  $X_k$  et de  $X$ , les  $\varepsilon$ -réseaux  $N_k$  et  $N$  peuvent être pris finis, auquel cas la convergence de Lipschitz peut être remplacée par une convergence simple des fonctions de distance.

On pointe l'espace  $\tilde{V}^{\text{ab},1}$  en  $\tilde{v}$  au-dessus de  $v \in V$ . Puis on identifie le groupe d'automorphisme du revêtement  $\tilde{V}^{\text{ab},1} \rightarrow V$  à  $H_1(V, \mathbb{Z})/\text{tors.}$ . Ainsi  $\Gamma$  opère sur  $\tilde{V}^{\text{ab},1}$ ; cette action est désignée par  $(\alpha, x) \mapsto \alpha.x$ . Deux normes cohabitent sur  $\Gamma$  :

— la norme géométrique associée à l'action sur  $\tilde{V}^{\text{ab},1}$  pointé en  $\tilde{v}$ , à savoir

$$\|\alpha\|_{\text{geo}} = d(\tilde{v}, \alpha.\tilde{v});$$

— la norme géométrique limite

$$\|\alpha\|_{\text{lim}} := \lim_{q \rightarrow +\infty} q^{-1} d(\tilde{v}, (q\alpha).\tilde{v}).$$

D'après le théorème 3.5 et la proposition 3.12, la norme géométrique limite est aussi égale à la norme stable  $\|\cdot\|_{\mathbb{R}}$  restreinte à  $\Gamma$  vu comme un réseau de  $H_1(V, \mathbb{R})$ .

Soit  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  une  $\mathbb{Z}$ -base de  $H_1(V, \mathbb{Z})$ . Fixons  $\varepsilon > 0$ . On se donne  $k_0$  assez grand pour que :

1. D'une part

$$2^{-k_0} \left( \sum_{i=1}^n \|\alpha_i\|_{\text{geo}} + \text{diam}(V) \right) < \varepsilon;$$

2. d'autre part, le groupe  $N = 2^{-k_0} H_1(V, \mathbb{Z}) / \text{tors.} < H_1(V, \mathbb{Q})$  est un  $\varepsilon$ -réseau dans  $H_1(V, \mathbb{R})$  avec la norme stable.

Pour  $k \geq k_0$ , on envoie  $N$  dans  $\tilde{V}^{\text{ab},1}$  par

$$\varphi_k(\nu) = (2^k \nu).\tilde{v}.$$

Puisque  $2^k \nu \in \Gamma$  dès que  $k \geq k_0$ , cette action est bien définie. Nous allons montrer que l'image  $N_k := \varphi_k(N)$  obtenue est un  $\varepsilon$ -réseau dans  $2^{-k} \tilde{V}^{\text{ab},1}$ . En effet, pour tout  $\tilde{x} \in \tilde{V}^{\text{ab},1}$ , si  $\alpha \in \Gamma$  est tel que  $d(\alpha.\tilde{v}, \tilde{x}) = \inf_{\gamma \in \Gamma} d(\gamma.\tilde{v}, \tilde{x})$ , alors cette dernière distance est plus petite que le diamètre de  $V$ , tandis que si l'on décompose  $\alpha$  sous la forme

$$\alpha = \sum_i x_i \alpha_i = \sum_i (2^{k-k_0} y_i + z_i) \alpha_i.$$

avec les  $z_i$  entiers,  $0 < z_i < 2^{k-k_0}$ , puis en posant  $\alpha' = 2^{k-k_0} (y_1 \alpha_1 + \dots + y_n \alpha_n)$ , on obtient (cf. figure 8)

$$\begin{aligned} d(\alpha'.\tilde{v}, \tilde{x}) &\leq d(\alpha'.\tilde{v}, \alpha.\tilde{v}) + d(\alpha.\tilde{v}, \tilde{x}) \\ &\leq \|\alpha' \alpha^{-1}\|_{\text{geo}} + \text{diam}(V) \\ &\leq 2^{k-k_0} \sum_i \text{long}(\alpha_i) + \text{diam}(V) \\ &\leq 2^k \cdot \varepsilon, \end{aligned}$$

la dernière inégalité ayant lieu suite à la condition 1. Finalement, pour tous  $\nu, \mu \in N$ ,

$$\begin{aligned} d(\varphi_k(\mu), \varphi_k(\nu))_{2^{-k} \tilde{V}^{\text{ab},1}} &= 2^{-k} d(\varphi_k(\mu), \varphi_k(\nu))_{2^{-k} \tilde{V}^{\text{ab},1}} \\ &= 2^{-k} d((2^k \nu).\tilde{v}, (2^k \mu).\tilde{v})_{\tilde{V}^{\text{ab},1}} \\ &\xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \|\nu \mu^{-1}\|_{\text{lim}} \\ &= \|\nu - \mu\|_{\mathbb{R}}. \end{aligned}$$

Pour finir, donnons-nous  $r > 0$ . Le calcul précédent montre qu'il y a convergence de Lipschitz de  $\varphi_k(B_r \cap N) \subset 2^{-k} \tilde{V}^{\text{ab},1}$  vers  $B_r \cap N$ . Or pour tout  $\varepsilon' > 0$ ,  $\varphi_k(B_r \cap N)$  est un

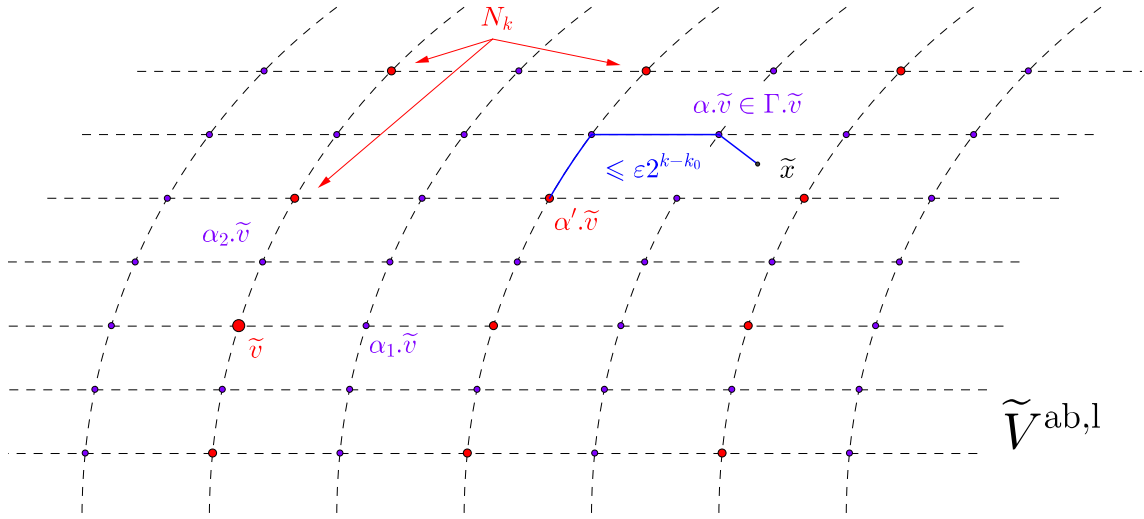


FIGURE 8 –  $N_k$  dans  $\tilde{V}^{ab,1}$

$\varepsilon$ -réseau de  $B(\tilde{v}, r - \varepsilon')$  pour  $k$  assez grand. On peut donc trouver pour tout  $\rho < r$  une suite  $(\varepsilon_n)$  avec  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  telle que  $B(\tilde{v}, \rho + \varepsilon_n)$  converge au sens de Hausdorff-Gromov vers  $B_\rho(0)$  dans  $H_1(V, \mathbb{R})$ .  $\square$

Avec le vocabulaire de [BBI01], on dit que l'espace vectoriel  $H^1(V, \mathbb{R})$  muni de la norme stable est le cône asymptotique Gromov-Hausdorff de  $\tilde{V}^{ab,1}$  pointé. Le théorème 3.16 est un cas particulier du théorème 1 de [Pan83] dû à Pansu, où  $\Gamma$  est remplacé par un groupe virtuellement nilpotent; la métrique limite obtenue est une métrique de Carnot-Carathéodory sur un groupe de Carnot, toujours définie par la norme stable. C'est un fait plus général que les cônes asymptotiques (dans un sens plus général) d'un espace quasi-homogène (i.e. admettant un sous-groupe d'isométries co-borné) sont homogènes, cf. [KL95], prop 3.9.

### 3.1.4 Norme stable et volume asymptotique

**Définition 3.19.** Soit  $W$  une variété riemannienne non compacte de dimension  $n$ , admettant une action par isométries, libre et proprement discontinuë d'un groupe  $\Gamma$  infini discret à croissance polynômiale de degré  $n$  telle que  $\Gamma \backslash W$  est compacte. On définit le volume asymptotique de  $W$  comme

$$\mathcal{V}(W) := \lim_{r \rightarrow +\infty} r^{-n} \text{Vol}(B_r(x)) \quad (3.20)$$

Cette limite existe ([Pan83], § 51) dans  $(0, +\infty)$  et ne dépend pas de  $x$ .

Remarque 3.21. Si  $d$  est la distance géométrique sur  $\Gamma$  associée à  $\Gamma \curvearrowright W$ , alors

$$\mathcal{V}(W) = \text{Vol}(\Gamma \backslash W) \cdot \lim_{r \rightarrow +\infty} r^{-n} |B^d(\Gamma)| \quad (3.22)$$

La limite  $\lim_{r \rightarrow +\infty} r^{-n} |B^d(\Gamma)|$  est appelée volume asymptotique de  $\Gamma$ .

*Exemple 3.23.* Soit  $T$  un tore riemannien. Burago et Ivanov [BI95] ont montré en 1995 l'égalité

$$\mathcal{V}(\tilde{T}) \geq \omega_n \text{Vol}(T).$$

avec égalité si et seulement si  $T$  est un tore plat. Une minoration moins bonne peut être obtenue directement avec le lemme de Besicovitch, cf. [BBI01].

**Proposition 3.24.** *Soit  $V$  une variété riemannienne compacte,  $\Gamma = \text{H}_1(V, \mathbb{Z})/\text{tors.}$  vu comme un réseau de  $\text{H}_1(V, \mathbb{R})$ . Alors pour toute mesure de Haar  $\mu$  sur  $\text{H}_1(V, \mathbb{R})$  :*

$$\mathcal{V}(\tilde{V}^{\text{ab},1}) = \text{Vol}(V) \frac{\mu(B^{\|\cdot\|_{\mathbb{R}}}(1))}{\text{covol}_{\mu}(\text{H}_1(V, \mathbb{Z}))} \quad (3.25)$$

*Démonstration.* Soit  $\tilde{x}$  dans  $\tilde{V}^{\text{ab},1}$ . On pose  $D = B_{\tilde{x}}(\text{diam}(V))$ ; il s'agit d'un compact, qui se projette surjectivement sur  $V$  par  $\tilde{V}^{\text{ab},1} \rightarrow V$ . D'après le théorème 3.16, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $r_0 > 0$  et pour tout  $r > r_0$  et un encadrement

$$\left( B^{\|\cdot\|_{\mathbb{R}}}(r(1-\varepsilon)) \cap \Gamma \right) \cdot D \subset B_x^{\tilde{V}^{\text{ab},1}}(r) \subset \left( B^{\|\cdot\|_{\mathbb{R}}}(r(1+\varepsilon)) \cap \Gamma \right) \cdot D.$$

Quand  $\rho$  tend vers  $+\infty$ , le nombre de points dans  $B^{\|\cdot\|_{\mathbb{R}}}(\rho) \cap \Gamma$  est équivalent à  $\rho^n \mu(B^{\|\cdot\|_{\mathbb{R}}}(1))$  divisé par le covolume de  $\Gamma$  pour  $\mu$ . Finalement,

$$\text{Vol} \left( \left( B^{\|\cdot\|_{\mathbb{R}}}(\rho) \cap \Gamma \right) \cdot D \right) \sim_{\rho \rightarrow +\infty} \text{Vol}(V) \left| B^{\|\cdot\|_{\mathbb{R}}}(\rho) \cap \Gamma \right| \sim \text{Vol}(V) \rho^n \frac{\mu(B^{\|\cdot\|_{\mathbb{R}}}(1))}{\text{covol}_{\mu}(\Gamma)},$$

ce qui termine la preuve.  $\square$

### 3.2 Les normes $|\cdot|_p$ sur les groupes de cohomologie

On suppose  $V$  munie d'une  $m$ -densité  $F$  et d'une forme volume  $\omega$ , et on désigne par  $\mathcal{M}^*$  la norme co-masse ponctuelle sur  $\Lambda^m TV$  associée à  $F$  par la définition 2.22. On va munir les espaces de cohomologie de normes  $L^p$  (on s'intéresse ici essentiellement aux normes  $L^1$  et  $L^\infty$ ). Signalons que sans hypothèse de compacité, les formes  $L^p$  donneraient vraiment une cohomologie différente des cohomologies usuelle ou à support compact – la cohomologie  $L^p$  de la variété.

**Définition 3.26** (Norme  $L^p$  sur les  $m$ -formes). *Soit  $\phi$  une  $m$ -forme borélienne sur  $V$ , et soit  $p \in [1, +\infty]$ . On définit sa norme  $L^p$  comme la norme  $L^p$  de  $\mathcal{M}^*$  pour  $\omega$ , i.e. si  $p < +\infty$  par*

$$\|\phi\|_p^p = \int_V \mathcal{M}^*(\phi)^p \omega \quad (3.27)$$

Pour  $p = +\infty$ , la norme  $L^p$  est la norme co-masse  $\mathbf{M}^*$  définie plus haut.

Si  $\eta$  est une classe de cohomologie dans  $\text{H}^m(V)$ , on pose

$$|\eta|_p := \inf \{ \|\phi\|_p : \phi \in \eta \}.$$

**Proposition 3.28.** *La semi-norme  $|\cdot|_\infty$  est une norme.*

*Démonstration.* Le sous-espace  $\mathcal{B}^m(V)$  est défini par le système infini d'équations

$$\int_C \alpha = 0.$$

Pour toute sous-variété sans bord  $C$ . Or  $\int_C \alpha \leq \mathbf{M}(C)\mathbf{M}^*(\alpha)$ , donc ces équations déterminent des sous-espaces fermés dans  $\mathcal{Z}^m(V)$  muni de la norme  $\mathbf{M}^*$ . Si donc  $|\eta|_\infty = 0$ , alors 0 est dans l'adhérence de  $\eta$ , mais celle-ci est égale à  $\eta$ . Donc  $\eta = 0$ .  $\square$

**Proposition 3.29.** *Soit  $V$  une variété riemannienne compacte de dimension  $n$ . La norme  $|\cdot|_{\frac{n}{n-1}}$  sur  $H^{n-1}(V, \mathbb{R})$  est invariante par changement conforme de métrique.*

*Démonstration.* Soit  $\hat{g} = e^{2\varphi}g$  un changement conforme de métrique, et notons  $\mathcal{M}_{\hat{g}}^*$  et  $\mathcal{M}_g^*$  les normes co-masse ponctuelles associées à  $\hat{g}$  et  $g$ . Alors pour toute forme  $\phi$ ,

$$\mathcal{M}_{\hat{g}}^*(\phi) = e^{-\deg(\phi)\varphi} \mathcal{M}_g^*(\phi).$$

En particulier, si  $\nu_{\hat{g}}$  et  $\nu_g$  sont les formes de volume riemanniennes associées, définies par la normalisation  $\mathcal{M}_g^*(\nu_g) = 1$ ,  $\nu_{\hat{g}} = e^{n\varphi}\nu_g$ . D'où, pour  $\phi$  une  $n-1$ -forme

$$\|\phi\|_{\hat{g}, \frac{n}{n-1}} = \int_V \mathcal{M}_{\hat{g}}^*(\phi)^{\frac{n}{n-1}} \nu_{\hat{g}} = \int_V \mathcal{M}_g^*(\phi)^{\frac{n}{n-1}} e^{-n\varphi} e^{n\varphi} \nu_g = \|\phi\|_{g, 2}^n.$$

$\square$

En particulier, la norme  $L^2$  sur  $H^1(T, \mathbb{R})$  est un invariant conforme.

*Remarque 3.30.* D'après l'équation d'Euler-Lagrange, s'il est atteint, le minimum de la norme  $L^2$  dans une classe de cohomologie est atteint par une forme harmonique. Dans chaque classe de cohomologie il existe une unique forme harmonique [Jos05].

### 3.3 Isométries

#### 3.3.1 Isométries et dualité entre espaces de (co-)homologie

**Proposition 3.31.** *Les normes  $|\cdot|_\infty$  sur  $H^k(V, \mathbb{R})$  et  $|\cdot|_{\mathbb{R}}$  sur  $H_k(V, \mathbb{R})$  sont duales.*

*Démonstration.* On désigne par  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  le crochet de dualité naturel entre ces deux espaces. Soit  $\omega$  une classe de cohomologie,  $\omega \in H^k(V, \mathbb{R})$  et  $\alpha$  une classe d'homologie  $\alpha \in H_k(V, \mathbb{R})$ . Pour tout cocycle  $\phi \in \omega$  et tout cycle  $\gamma \in \alpha$ ,  $\gamma(\phi) \leq \mathbf{M}(\gamma)\mathbf{M}^*(\phi)$ . D'où  $|\langle \alpha, \omega \rangle| \leq \|\omega\|_\infty \|\alpha\|_{\mathbb{R}}$ . En particulier,

$$\sup\{|\langle \alpha, \omega \rangle| : \|\omega\|_\infty \leq 1\} \leq \|\alpha\|_{\mathbb{R}}.$$

Inversement, soit  $c_0 \in \alpha$ . Étant donné que  $\mathcal{B}_k(V)$  est fermé dans l'espace des chaînes de masse finie, c'est le noyau d'une forme linéaire continue  $L$  sur  $\mathcal{B}_k(V) \oplus \mathbb{R}c_0$ ; on peut de plus demander que  $L(c_0) = \|\alpha\|_{\mathbb{R}}$ . D'après le théorème de Hahn-Banach,  $L$  s'étend en une application continue, encore nommée  $L$  de norme d'opérateur  $\leq 1$  sur l'espace des  $k$ -chaînes de masse finie. Nous avons ici besoin d'un théorème de représentation des formes linéaires  $\mathbf{M}$ -continues sur les chaînes. D'après [Fed69] 4.1.19 (ou [Whi57] p. 157 et 267), il existe une forme  $\eta$  de norme comasse finie, qui s'annule sur les bords, et représente  $L$ . On peut régulariser

$\eta$  par convolution ; si  $\omega$  est la classe de cohomologie correspondante, alors par la condition de normalisation de  $L$ ,  $\omega(\alpha) = \|\alpha\|_{\mathbb{R}}$  et  $|\omega|_{\infty} \leq 1$ .  $\square$

De la même manière, on démontre la

**Proposition 3.32.** *La dualité de Poincaré  $(H^k(V, \mathbb{R}), |\cdot|_1) \rightarrow (H_{n-k}(V, \mathbb{R}), |\cdot|_{\mathbb{R}})$  est une isométrie.*

*Démonstration.* La dualité de Poincaré est induite par l'application  $\alpha \mapsto C_{\alpha} : \phi \rightarrow \int_{\mathbb{T}^n} \alpha \wedge \phi$ , et la masse du courant étalé est donnée par

$$\mathbf{M}(C_{\alpha}) = \int_{\mathbb{T}^n} \|\alpha\| \omega.$$

D'où

$$\begin{aligned} \|[C_{\alpha}]\|_{\mathbb{R}} &= \inf \{\mathbf{M}(\beta) : \beta \in [C_{\alpha}]\} \leq \inf \{\mathbf{M}(C'_{\alpha}) : [\alpha'] = [\alpha]\} \\ &= \inf \{\|\alpha'\|_{L^1} : [\alpha'] = [\alpha]\} = \|[C_{\alpha}]\|_1, \end{aligned}$$

mais l'inégalité est une égalité car la régularisation diminue la masse.  $\square$

### 3.3.2 Calibration. Conséquences

**Définition 3.33** (Calibration). *Soit  $V$  une variété différentielle de dimension  $n$ , munie d'une densité  $F$  de degré  $k$ . Soit  $\phi$  une forme différentielle sur  $V$  de degré  $k$ , fermée, telle que  $\mathbf{M}^*(\phi) \leq 1$ . On dit qu'un cycle  $C \in \mathcal{Z}_k(V)$  est calibré par  $\phi$  si  $\mathbf{M}(C) = C(\phi)$ .*

Si  $C$  est calibré, alors il réalise le minimum de la masse dans sa classe d'homologie réelle. En effet, pour tout  $C'$  homologue à  $C$ , étant donné que  $\phi$  est fermée et de norme comasse inférieure à 1,

$$\mathbf{M}(C) = C(\phi) = C'(\phi) \leq \mathbf{M}(C').$$

*Exemple 3.34.* Dans l'exemple 2.28, nous avons montré que la comasse d'une forme de Kähler est 1. Dans  $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ , la forme de Kähler  $\Omega$  restreinte à une droite projective complexe, coïncide avec la forme de volume de sa métrique riemannienne sphérique. Par conséquent, les droites projectives complexes minimisent la masse dans la classe génératrice de l'homologie de  $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ .

Dans la suite de cette sous-section, nous allons appliquer le principe de calibration pour décrire les normes au sens de 3.1 et 3.2 sur les espaces d'homologie et de cohomologie des tores finslériens homogènes (i.e. dont la structure finslérienne est invariante par translation). Rappelons que si  $T$  est un tore et  $R$  son revêtement universel, il existe des isomorphismes canoniques

$$H^k(T, \mathbb{R}) \simeq \Lambda^k R, \tag{3.35}$$

$$H_k(T, \mathbb{R}) \simeq \Lambda_k R. \tag{3.36}$$

Si  $H^k(V)$  est représentée par la cohomologie de de Rham, l'isomorphisme (3.35) est induit par

$$\mathcal{Z}^k(T) \hookrightarrow C^{\infty}(R, \Lambda^k R) \xrightarrow{f_T} \Lambda^k R.$$

et la réciproque est l'application qui à une  $k$ -forme  $\phi$  sur  $R$  (algèbre de Lie de  $T$ ) associe le champ de  $k$ -formes  $\bar{\phi}$  invariant sur  $T$  tel que  $\bar{\phi}(0) = \phi$ . Mieux, on dispose d'un isomorphisme d'algèbres graduées<sup>18</sup>

$$\Lambda^* R \simeq H^*(T, \mathbb{R}), \quad (3.37)$$

qui envoie le produit extérieur sur le cup-produit de  $H^*(T)$ . Les deux lemmes suivants correspondent au lemme 19 dans [Pan99].

**Lemme 3.38.** *Soit  $T$  un tore finslérien homogène, muni d'une forme volume  $\omega$  d'intégrale 1, et de l'intégrand de Poincaré sur  $\Lambda^{n-1}TT$  correspondant. Les courants d'intégration sur les sous-tores affines plongés de codimension 1 réalisent le minimum de la masse dans leur classe d'homologie.*

*Démonstration.* Soit  $R$  le revêtement universel de  $T$  avec la norme telle que  $\pi : R \rightarrow T$  est une isométrie. Soit  $E$  le réseau  $\pi_1(T).0$  dans  $R$ , de co-volume 1 pour  $\pi^*\omega$ . Soit  $T'$  un sous-tore affine plongé orienté de codimension 1 ; quitte à effectuer une translation (ce qui ne change pas la masse du courant d'intégration) on peut supposer que  $T'$  est linéaire. Son revêtement universel  $\tilde{T}'$  s'identifie à un hyperplan vectoriel de  $R$ , et  $E' = E \cap \tilde{T}'$  est un réseau de  $\tilde{T}'$ . Soit  $v_1, \dots, v_{n-1}$  une base de ce réseau, orientée comme  $T'$ . Si  $\Lambda^{n-1}R$  est muni de l'intégrand de Poincaré  $F^*$  associée à la norme de  $R$ , puis  $\Lambda_{n-1}R$  de l'intégrand dual  $F$ , la boule unité de  $F$  dans  $\Lambda_{n-1}R$  est compacte, il existe  $\phi \in \Lambda^{n-1}R$  telle que

$$\phi(v_1 \wedge \dots \wedge v_{n-1}) = \sup\{\phi'(v_1 \wedge \dots \wedge v_{n-1}), F^*(\phi') \leq 1\} = F(v_1 \wedge \dots \wedge v_{n-1}).$$

$\phi$  est une  $n-1$ -forme sur  $R$ , elle se prolonge en une  $n-1$ -forme  $\bar{\phi}$  sur  $T$ , fermée, invariante par translations et telle que  $M^*(\bar{\phi}) = F^*(\phi) = 1$ . Ecrivons  $\xi = v_1 \wedge \dots \wedge v_{n-1}$ . Pour toute  $n-1$ -forme  $\psi$  de co-masse plus petite que 1 sur le tore  $T$ , en posant  $\sigma(x_1, \dots, x_{n-1}) = \pi(x_1 v_1 + \dots + x_{n-1} v_{n-1})$  :

$$I_{T'}(\psi) = \int_{T'} \psi = \int_{[0,1]^{n-1}} \langle \xi, \psi_{\sigma(x)} \rangle dx \leq \int_{[0,1]^{n-1}} \langle \xi, \phi \rangle = I_{T'}(\bar{\phi}).$$

Donc  $\bar{\phi}$  calibre  $I_{T'}$ . D'après le principe de calibration,  $I_{T'}$  est minimal dans sa classe d'homologie réelle.  $\square$

**Lemme 3.39.** *Les  $n-1$ -formes invariantes par translation sur  $T$  réalisent le minimum de la comasse dans leur classe de cohomologie.*

*Démonstration.* Soit  $\phi$  une  $n-1$ -forme invariante par translation.

**1er cas :  $\phi$  calibre un sous-tore plongé.** Alors si  $\xi$  est le  $n-1$ -vecteur dirigeant ce tore (cf. preuve du lemme précédent), pour toute forme  $\psi$  cohomologue à  $\phi$ ,

$$C(\phi) = C(\psi) = \int_{[0,1]^{n-1}} \langle \xi, \psi_{\sigma(x)} \rangle.$$

De sorte que pour au moins un  $x_0$ ,  $\langle \xi, \psi_{\sigma(x_0)} \rangle$  ce qui implique que  $M^*(\psi) \geq M^*(\phi)$ .

---

18. nous renvoyons au cours [http://www.math.u-psud.fr/~paulin/notescours/cours\\_geodiff.pdf](http://www.math.u-psud.fr/~paulin/notescours/cours_geodiff.pdf), 6.2, pour une preuve de (3.37), qui implique les deux isomorphismes précédents.

**2e cas : cas général** Quitte à renormaliser  $\phi$ , on peut supposer que sa comasse est 1. Il existe  $\zeta$  (non unique a priori) dans  $\Lambda_{n-1}R$  tel que  $\langle \zeta, \phi \rangle = \sup \langle \xi, \phi \rangle : F(\xi) \leq 1$ . Ecrivons  $\zeta$  sous la forme  $v_1 \wedge \dots \wedge v_{n-1}$ . Quitte à utiliser une suite d'approximations rationnelles des  $v_i$ , on dispose d'une suite  $\zeta_i \rightarrow \zeta$ ,  $\zeta_i \in \Lambda_{n-1}\mathbb{Q}$ , qui orientent des sous-tores plongés  $T'_i$ . Alors  $\langle \zeta_i, \phi \rangle \rightarrow \langle \zeta, \phi \rangle$ . Le calcul précédent donne que pour toute  $\psi$  cohomologue à  $\phi$ , pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $\mathbf{M}^*(\psi) \geq 1 - \varepsilon$ .

□

### 3.4 Le tore $T_\infty$

#### 3.4.1 Définition topologique

**Définition 3.40.** Soit  $V$  une variété compacte. On suppose que le premier groupe d'homologie  $H_1(V, \mathbb{Z})$  est sans torsion. On définit

$$\mathcal{J} = \frac{H_1(V, \mathbb{R})}{H_1(V, \mathbb{Z})}.$$

Nous allons décrire une application  $f : V \rightarrow \mathcal{J}$ . La construction qui suit est tirée de [Gro07], 4.21. Soit  $E$  un espace vectoriel de formes fermées supplémentaire de  $\mathcal{Z}^1(V)$ . On se donne  $v \in V$ , et on définit l'application  $\tilde{f}$  sur l'ensemble des courbes  $C_v$  tracées sur  $V$  partant de  $v$ , à valeurs dans  $E^* \simeq H_1(V, \mathbb{R})$ , donnée par

$$\langle \tilde{f}(c), \alpha \rangle = \int_c \alpha.$$

Si  $c$  et  $c'$  dans  $C_v$  ont la même extrémité  $x$ , alors pour tout  $\alpha \in E$

$$\langle \tilde{f}(c), \alpha \rangle - \langle \tilde{f}(c'), \alpha \rangle = \int_{c-c'} \alpha.$$

Soit encore, l'intégrale de  $\alpha$  sur le lacet  $\gamma$  formé par  $c$  et  $c'$ . Celle-ci ne dépend que de la classe d'homologie entière de  $\gamma$ . Si donc on identifie  $V$  à  $C_v / \sim$ , où  $\sim$  est la relation d'équivalence donnée par  $c \sim c'$  si les extrémités de  $c$  et  $c'$  sont identiques, alors  $\tilde{f}$  induit une application  $f : V \rightarrow H_1(V, \mathbb{R})/H_1(V, \mathbb{Z}) = \mathcal{J}$ .

Un cas particulier important est celui où  $V = T$  est un tore. Alors  $f$  est une équivalence d'homotopie, ce qui permet d'identifier canoniquement les homologie et cohomologie de  $T$  et de  $T_\infty$ .

#### 3.4.2 Structure finslérienne homogène

**Définition 3.41.** Soit  $T$  un tore finslérien de dimension  $n$ . On munit le groupe  $H^1(T, \mathbb{R})$  de la norme  $|\cdot|_1$ , quotient de la norme  $L^1$  sur les 1-formes fermées de  $T$ . Puis,  $T_\infty$  est par définition  $\mathcal{J}$  muni de la structure finslérienne homogène induite.

*Remarque 3.42.* Attention, la structure finslérienne diffère de celle de [Gro07] 4.21., qui munit dans les mêmes conditions le tore  $\mathcal{J}$  de la structure induite par la norme stable sur  $H_1(T, \mathbb{R})$ .



On munit  $T_\infty$  de l'élément de volume normalisé  $\omega_\infty$  pour lequel  $f : T \rightarrow T_\infty$  est de degré +1. La proposition suivante décrit l'intégrand de Poincaré de  $T_\infty$  associé à cette structure finslérienne et à  $\omega_\infty$  :

**Proposition 3.43** ([Pan99], corollaire 18). *Soit  $F^*$  l'intégrand de Poincaré du tore finslérien  $T_\infty$  avec  $\omega_\infty$ . On définit  $F^*$  sur  $H^{n-1}(T_\infty, \mathbb{R})$  à l'aide de l'isomorphisme naturel (3.35) de cet espace avec  $\Lambda^{n-1}H_1(T_\infty, \mathbb{R})$  donné par la trivialisaton du fibré tangent de  $T_\infty$ . Il y a alors un isomorphisme isométrique*

$$(H^{n-1}(T_\infty, \mathbb{R}), F^*) \xrightarrow{f^*} (H^{n-1}(T, \mathbb{R}), |\cdot|_\infty), \quad (3.44)$$

où  $f$  est l'équivalence d'homotopie décrite en 3.4.1.

*Démonstration.* Ecrivons  $R = H_1(T, \mathbb{R})$ , muni de  $\pi^*\omega_\infty$  pour laquelle  $H_1(T, \mathbb{Z})$  est de covolume 1. D'après (1.27), l'intégrand de Poincaré sur  $(R, |\cdot|_1, \omega_\infty)$  est caractérisé par le fait que pour tout  $\psi \in \Lambda^{n-1}R$ ,

$$F^*(\psi) = \sup \left\{ \frac{\beta \wedge \psi}{\pi^*\omega_\infty} : \beta \in R^*, |\beta|_1 \leq 1 \right\}.$$

Si  $\alpha$  est une classe dans  $H^1(T, \mathbb{R})$  représentant  $\beta$  et  $\phi$  dans  $H^{n-1}(T, \mathbb{R})$  représentant  $\psi$  à travers l'isomorphisme d'algèbres graduées (3.37), alors  $\beta \wedge \psi / \pi^*\omega_\infty = \int_T \alpha \wedge \phi$ . Enfin, d'après les isométries de 3.3,

$$F^*(\psi) = \sup \left\{ \int_T \alpha \wedge \phi : \alpha \in \mathcal{Z}^1(T, \mathbb{R}), \|\alpha\|_{L^1} \leq 1 \right\} \stackrel{3.32}{=} |\phi|_{\mathbb{R}}^* \stackrel{3.31}{=} |\phi|_\infty. \quad \square$$

**Corollaire 3.45.** *Soit  $T$  un tore finslérien muni d'un élément de volume  $\omega$  de volume total 1. Soit  $T_\infty$  associé à  $T$ , sous les mêmes hypothèses que dans la proposition précédente. Alors l'isomorphisme naturel*

$$(H_{n-1}(T, \mathbb{R}), |\cdot|_{\mathbb{R}}) \xrightarrow{f^*} (H_{n-1}(T_\infty, \mathbb{R}), |\cdot|_{\mathbb{R}}), \quad (3.46)$$

est une isométrie.

*Démonstration.* D'après le lemme 3.39,  $(H^{n-1}(T_\infty, \mathbb{R}), |\cdot|_\infty)$  est isométrique à  $\Lambda^{n-1}R$ . D'autre part, l'isomorphisme naturel

$$\varphi : \Lambda^{n-1}R \rightarrow (H^{n-1}(T, \mathbb{R}), |\cdot|_\infty).$$

est isométrique d'après la proposition 3.43. En considérant l'application transposée de la composition de ces deux isométries, et en faisant appel à la proposition 3.31, on obtient le résultat voulu.  $\square$

Le corollaire précédent jouera un rôle important page 58 dans la minoration du profil isopérimétrique du revêtement universel de  $T$ , comparé à celui de  $T_\infty$ .

## 4 Homogénéisation du problème isopérimétrique asymptotique

Nous énonçons et démontrons ici les résultats principaux concernant le problème isopérimétrique des revêtements universels de tores obtenus par Pansu [Pan99]. On énonce ensuite une version généralisée (en grande partie conjecturale) de ces résultats, concernant les variétés munies d'une action géométrique d'un groupe abélien libre. La majoration du profil isopérimétrique est obtenue dans le cadre général.

### 4.1 Problème isopérimétrique des revêtements universels de tores.

#### 4.1.1 Définitions préliminaires

Afin d'exprimer les théorèmes de Pansu d'une manière plus directe, nous introduisons au préalable des définitions.

**Définition 4.1** (Profil isopérimétrique). *Soit  $V$  une variété finslérienne non compacte de dimension  $n$ ,  $\omega$  un élément de volume. On appelle profil isopérimétrique de  $V$  la fonction  $I : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  telle que*

$$I(\tau) = \inf \{ \mathbf{M}(\partial D) : D \in \mathbf{I}_n(V), \mathbf{M}(D) \geq \tau \}.$$

On admettra que ceci correspond à l'infimum portant sur les domaines à bord  $\mathcal{C}^1$  (lemme 14 et proposition 16 dans [Pan99]).

**Définition 4.2.** *Soit  $V$  une variété finslérienne,  $\omega$  une forme volume. On définit une distance  $d_\omega$  sur l'ensemble des domaines à bord  $\mathcal{C}^1$  par morceaux de  $V$  par*

$$d_\omega(D_1, D_2) = \int_{D_1 \Delta D_2} \omega.$$

*Remarque 4.3.* La distance  $d_\omega$  s'exprime aussi sous la forme

$$d_\omega(D_1, D_2) = \mathbf{M}(I_{D_1} - I_{D_2}) = \|I_{D_1} - I_{D_2}\|_b,$$

la seconde égalité venant du fait que  $I_{D_1}$  et  $I_{D_2}$  sont des courants de dimension maximale.

#### 4.1.2 Énoncé des théorèmes

**Théorème 4.4** ([Pan99]). *Soit  $T$  un tore finslérien, muni d'un élément de volume normalisé,  $\tilde{T}$  son revêtement universel. On munit  $H_1(T, \mathbb{R})$  de la norme duale de la norme  $|\cdot|_1$  sur  $H^1(T, \mathbb{R})$ , et de l'élément de volume  $\omega_\infty$  pour lequel  $H_1(T, \mathbb{Z})$  a covolume 1. Soit  $I$  (resp.  $I_\infty$ ) le profil isopérimétrique de  $\tilde{T}$  (resp. de  $H_1(T, \mathbb{R})$ ), alors*

$$I(\tau) \sim I_\infty(\tau) \tag{4.5}$$

**Corollaire 4.6** ([Pan99], th 1). *Sous les mêmes hypothèses,  $I(\tau) \sim c_\infty \tau^{\frac{n-1}{n}}$ , avec*

$$c_\infty = n \mathcal{V}(H^{n-1}(T, \mathbb{Z}), |\cdot|_\infty)^{1/n}.$$

*Preuve du corollaire.* D'après la proposition 3.32, l'espace  $H^1(T, \mathbb{R})$  muni de  $|\cdot|_1$  est isométrique à  $H_{n-1}(V, \mathbb{R})$  muni de la norme stable  $|\cdot|_{\mathbb{R}}$ . De plus, d'après la proposition 3.31, cette dernière norme est duale de  $(H^{n-1}(T, \mathbb{R}), |\cdot|_{\infty})$ . L'inégalité isopérimétrique de Brunn donne alors l'expression de  $I_{\infty}$ , et donc d'après le théorème, celle de  $c_{\infty}$ .  $\square$

Ces deux premiers résultats concernent le profil isopérimétrique seulement. Le troisième est plus précis : les domaines presque extrémaux ressemblent aux boules dans le revêtement universel muni de  $|\cdot|_1^*$ .

**Théorème 4.7** (Convergence des domaines extrémaux). *Sous les mêmes hypothèses que précédemment, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\tau_{\varepsilon}$  et  $\eta_{\varepsilon}$  tel que si  $D$  est un domaine à bord  $C^1$  de  $\tilde{T}$  tel que  $\int_D \omega_{\infty} \geq \tau_{\varepsilon}$  et*

$$\mu_F(\partial D) \leq (1 + \eta_{\varepsilon})c_{\infty} \left( \int_D \omega_{\infty} \right)^{\frac{n-1}{n}}, \quad (4.8)$$

alors il existe une boule pour la norme  $|\cdot|_1^*$  sur  $H_1(T, \mathbb{R})$  telle que

$$d_{\omega}(D, B) < \varepsilon \int_D \omega$$

*Exemple 4.9.* Vérifions les théorèmes dans le cas d'une métrique finslérienne homogène : soit  $(R, \|\cdot\|)$  le revêtement universel de  $T$ . Alors les 1-formes invariantes par translations sur  $T$  minimisent la norme  $L^1$  dans leur classe de cohomologie (convoyer une 1-forme par la fonction constante sur  $T$  égale à 1 diminue la norme  $L^1$ , d'après l'inégalité triangulaire intégrale). On en déduit que la norme duale de  $|\cdot|_1$  sur  $H^1(T, \mathbb{R})$  met cet espace en isométrie avec  $R$  muni de la norme  $\|\cdot\|$ .

Dans le cas très particulier de l'exemple précédent la norme  $L^1$  des 1-formes invariantes est égale à leur norme comasse (car  $T$  est de volume 1), donc il y a de plus une isométrie du dual de  $(H^1(T, \mathbb{R}), |\cdot|_1)$  avec  $H_1(T, \mathbb{R})$  muni de  $\|\cdot\|_{\mathbb{R}}$ , qui est le cône asymptotique de  $\tilde{T}$  (en fait égal à  $R$  car la métrique finslérienne est homogène). Cette isométrie n'a pas lieu en général : comme illustré sur la figure 2 dans l'introduction, le problème isopérimétrique asymptotique n'est pas équivalent au problème analogue posé dans le cône asymptotique <sup>19</sup>.

## 4.2 Généralisation : actions co-compactes des groupes abéliens libres

### 4.2.1 Contexte

Soit  $X$  une variété riemannienne munie d'une action libre, par isométries et à orbites discrètes <sup>20</sup> d'un groupe  $\Gamma$  de type fini telle que le quotient  $V = X/\Gamma$  est compact.  $\Gamma$  opère sur l'espace des  $k$ -formes de  $X$  par  $\gamma \cdot \psi = \gamma_* \psi$ , pour tout  $\gamma \in \Gamma$ . On peut souhaiter comparer les cohomologies de  $X$  et de  $V$ .

**Lemme 4.10.** *Pour tout  $h \in \text{Hom}(\Gamma) \simeq (\Gamma^{\text{ab}})^{\vee} \otimes \mathbb{R}$ , il existe  $f \in C^{\infty}(X)$  telle que pour tout  $\gamma \in \Gamma$ ,*

$$\gamma \cdot f - f = h(\gamma). \quad (4.11)$$

19. Selon le choix de convention, il y a une objection possible à cette assertion en dimension 2 : si l'intégrand choisi sur  $\Lambda_1 H_1(T, \mathbb{R})$  est la norme stable (ce qui revient à adopter la définition 1.33), alors le problème isopérimétrique asymptotique est le problème posé dans le cône asymptotique.

20. C'est suffisant pour assurer que l'action est proprement discontinue, cf. [Thu97], 3.5.11.

*Démonstration.* Fixons  $h$  dans  $\text{Hom}(\Gamma, \mathbb{R})$ . Il y a une action lisse de  $\Gamma$  sur le fibré vectoriel  $X \times \mathbb{R}$  définie par

$$\gamma \cdot (v, \lambda) = (\gamma \cdot v, \langle h(\gamma), \lambda \rangle).$$

Le quotient de cette action est un fibré en droites affines sur  $V$ ;  $f$  est solution de 4.11 si c'est une section globale de ce fibré. Puisque toutes les fibres sont contractiles, il n'y a pas d'obstruction à l'existence de sections globales.  $\square$

On déduit du lemme une inclusion naturelle

$$\varphi : \text{Hom}(\Gamma, \mathbb{R}) \hookrightarrow H^1(V, \mathbb{R}) \quad (4.12)$$

qui est obtenue en associant à  $h$  la classe de cohomologie de  $\pi_* df$ , où  $h$  et  $f$  sont liées par l'équation cohomologique (4.11). Dire que  $h$  est dans le noyau de  $\varphi$ , c'est dire que  $\pi_* df$  est exacte sur  $V$ , mais alors  $f$  est  $\Gamma$ -invariante, donc  $h = 0$ .

*Remarque 4.13.* En particulier, quand  $X$  est contractile tout relèvement à  $X$  d'une forme fermée sur  $V$  est exacte sur  $X$ , donc  $\varphi$  est surjective, et

$$H^1(V, \mathbb{R}) \simeq \text{Hom}(\Gamma, \mathbb{R}) \quad (4.14)$$

Dans ce cas, on dit que  $V$  est un espace classifiant de  $\Gamma$  et  $H^1(V, \mathbb{R})$  est aussi le premier groupe de cohomologie de  $\Gamma$  au sens de la cohomologie des groupes.

**Définition 4.15.** On définit  $R_\Gamma$  comme l'espace vectoriel  $\Gamma^{\text{ab}} \otimes \mathbb{R}$ , avec la norme telle que (4.12) est une injection isométrique de  $R_\Gamma^*$  dans  $(H^1(V, \mathbb{R}), |\cdot|_1)$ . On munit de plus  $R_\Gamma$  de la forme volume  $\omega_\infty$  qui fait de  $\Gamma$  un réseau de covolume 1.

On notera  $m$  le rang de  $\Gamma$ ; c'est aussi la dimension de  $R_\Gamma$ .

**Proposition 4.16.** Supposons que  $\Gamma$  est abélien. La dimension isopérimétrique de  $X$  est égale à  $\dim R_\Gamma = \text{rg } \Gamma / \text{tors.}$ .

*Démonstration.* Nous renvoyons pour cela à [Gro07] 6.19, qui démontre en fait un résultat plus précis :  $X$  et  $\Gamma$  admettent la même inégalité isopérimétrique, autrement dit il existe une constante  $c > 0$  telle que :

$$I_\Gamma(t) \leq c I_X(ct) + c,$$

$$I_X(t) \leq c I_\Gamma(ct) + c.$$

i où  $I_\Gamma$  est le profil isopérimétrique de  $\Gamma \simeq \mathbb{Z}^n$ . Finalement, quand  $\Gamma$  est abélien, sa dimension isopérimétrique coïncide avec le rang de sa composante libre.  $\square$

## 4.2.2 Conjectures

Ici,  $X$  est une variété finslérienne munie d'un élément de volume  $\omega$  et d'une action compacte d'un groupe abélien libre  $\Gamma$ . La conjecture 4.17 qui suit généralise le théorème 4.4, tandis que 4.18 généralise 4.7.

**Conjecture 4.17.** Soit  $\omega$  une forme volume  $\Gamma$ -invariante sur  $X$  telle que  $\int_V \pi_* \omega = 1$ . Le profil isopérimétrique de  $X$  vérifie  $I_X(\tau) \sim I_\infty(\tau)$ , où  $I_\infty(\tau)$  est le profil isopérimétrique de  $R_\Gamma$  muni de  $\omega_\infty$  qui fait de  $\Gamma$  un réseau de covolume 1.

On démontrera en 4.3 une partie de cette conjecture.

**Conjecture 4.18** (convergence des domaines extrémaux). Soit  $\lambda > 0$ . On fait opérer le réseau  $\lambda\Gamma < R_\Gamma$  sur  $\lambda X$  munie de  $\lambda^{-n}\omega$  par  $(\lambda\alpha) \cdot_\lambda x = \alpha \cdot x$ . Pour tout  $\lambda > 0$ , on se donne  $D_\lambda$  un courant entier sur  $\lambda X$  de masse 1 pour  $\omega_\lambda$ . On suppose que

$$\mathbf{M}(\partial D_\lambda) \sim \frac{I_X(\lambda^{-m})}{\lambda^{1-m}} \quad (4.19)$$

Soit  $\square$  un cube formé sur une  $\mathbb{Z}$ -base de  $\Gamma$  dans  $R_\Gamma$ . On fixe  $x \in X$ , et on définit  $D'_\lambda \in \mathbf{I}_n(X)$  par

$$D'_\lambda := \bigcup_{\gamma \in E} (\gamma + \square).$$

avec (en notant  $\delta = \text{diam}V$ ) :  $E := \{\gamma \in \Gamma : \mathbf{M}(D_\lambda \lfloor B_\delta(\gamma \cdot x)) \geq \frac{1}{2} \mathbf{M}(C_\omega \lfloor B_\delta(\gamma \cdot x))\}$   
Alors, si  $B$  est l'homothétique de la boule unité de  $R_\Gamma$  telle que  $\mathbf{M}(I_B) = 1$ ,

$$D'_\lambda \xrightarrow{b} I_B.$$

### 4.3 Majoration du profil isopérimétrique

Ce qui suit est une adaptation de la preuve de la proposition 28 dans [Pan99] avec les hypothèses un peu plus générales qui sont celles de 4.2. Le principe de la preuve est également très similaire à celui de [Gro07], 4.29 1/2 + (d). L'objectif est de montrer que, sous les hypothèses de 4.17,

$$\limsup \frac{I_{X,\omega}(\tau)}{I_{R_\Gamma,\omega_\infty}(\tau)} \leq 1. \quad (4.20)$$

Dans la suite, on note  $\pi : X \rightarrow V$  le revêtement de groupe  $\Gamma$ ,  $\delta = \text{diam}X/\Gamma$ . On fixe un point  $x \in X$ , au-dessus de  $v \in V$ . Nous allons commencer par faire l'hypothèse simplificatrice que la norme  $|\cdot|_1$  sur  $R_\Gamma^*$  a pour boule unité un polytope convexe symétrique par rapport à l'origine. Dans ce cas, c'est également vrai pour la norme  $|\cdot|_1^*$  : il existe des formes  $\beta_1, \dots, \beta_r$  sur  $R_\Gamma$  telles que  $|x|_1^* = \sup_x \beta_j(x)$ . Si l'on voit les  $\beta_j$  comme des cocycles  $\Gamma$ -équivariants, ils ont des classes de cohomologie  $\bar{\beta}_j$  dans  $H^1(V, \mathbb{R})$ . Soit donc  $\alpha_j \in \beta_j$  une forme  $\varepsilon$ -proche de réaliser le minimum de la norme  $L^1$  dans la classe de  $\beta_j$  :  $\|\alpha_j\| \leq (1 + \varepsilon)|\beta_j|_1$ . On définit  $f_j : X \rightarrow \mathbb{R}$  la primitive de  $\pi^*\alpha_j$  qui s'annule en  $x$ , puis on définit  $\tilde{\rho} = \sup_j f_j$ .  $\rho$  est sur  $X$  une approximation de  $|\cdot|_1^*$  sur  $R_\Gamma$ .

**Lemme 4.21.** Avec les notations précédentes, on désigne par  $R_j$  le secteur polyédral  $R_j = \{r \in R_\Gamma : |r|_1^* = \beta_j(r)\}$ , puis

$$X_j := \{y \in X : \text{dist}(y, (R_j \cap \Gamma) \cdot x) \leq \delta\}$$

Alors il existe une distance  $\delta' > 0$  telle que (cf. figure 9)

$$\forall y \in X, \text{dist}(y, X \setminus V_j) > \delta' \implies \rho(y) = f_j(y).$$

*Démonstration.* Puisque  $\alpha_j \in \bar{\beta}_j$ , pour tout  $\gamma \in \Gamma \cap R_j$ ,  $|\gamma|_1^* = \beta_j(\gamma) = f_j(\gamma \cdot x)$ . De plus, pour tout  $b_0 > 0$  il existe  $\delta_0$  tel que si  $\gamma \in \Gamma \cap R_j$  est à une distance supérieure à  $\delta_0$  (pour  $|\cdot|_1^*$ ) de  $\partial R_j$  dans  $R_\Gamma$ ,  $\beta_j(\gamma) - \sup_{i \neq j} \beta_i(\gamma) > b_0$ . Soit  $X_j(b_0)$  l'ensemble formé des tels  $\gamma$ .

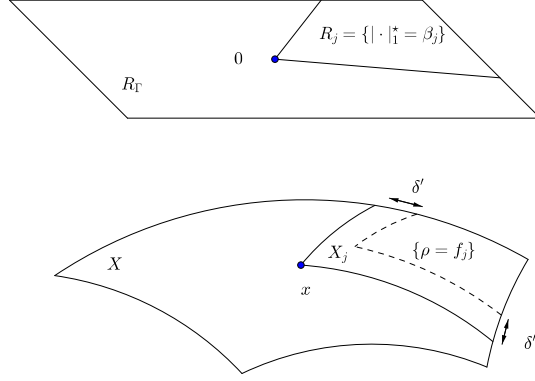


FIGURE 9 – Secteur polyédral  $R_j$  dans  $R_\Gamma$  et secteur  $X_j$  dans  $X$

Posons  $A = \sup_j \|\alpha_j\|_\infty$ . Alors pour tout  $y \in X$  tel que

$$\text{dist}(y, X_j(3A\delta)) \leq \delta, \quad (4.22)$$

$f_j(x) - \sup_{i \neq j} f_i(x) < 3A\delta - A\delta - A\delta > 0$ , d'où  $\rho(y) = f_j(y)$ . Finalement, (4.22) est automatiquement vérifiée dans  $X_j$  assez loin de  $\partial X_j$ .  $\square$

Pour tout  $t > 0$ , définissons la fonction  $\chi_t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  comme suit :

$$\chi_t(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x < t \\ 1 - \frac{x-t}{\sqrt{t}} & \text{si } t \leq x \leq t + \sqrt{t} \\ 0 & \text{si } x > t + \sqrt{t} \end{cases} \quad (4.23)$$

**Lemme 4.24.** On définit deux fonctions  $u_t$  et  $\tilde{u}_t$  sur  $R_\Gamma$  et  $X$  par

$$u_t(r) := \chi_t(|r|_1^*);$$

$$\tilde{u}_t(x) := \chi_t \circ \rho(x).$$

Alors, avec les notations précédentes, pour  $t$  assez grand

$$(1 - 2\varepsilon) \int_{R_\Gamma} |du_t|_1 \omega_\infty \leq \int_X |d\tilde{u}_t|_1 \omega \leq (1 - 2\varepsilon) \int_{R_\Gamma} |du_t|_1 \omega_\infty \quad (4.25)$$

*Démonstration.* Les formes  $du_t$  comme  $d\tilde{u}_t$  sont à support compact, contenus dans des couronnes centrées en 0 (resp. en  $x$ ). Nous allons négliger les contributions des voisinages des  $\partial X_j$  et  $\partial R_j$  aux intégrales dans (4.25), ce qui est licite d'après le lemme 4.21. Soit  $D = B_\delta(x)$ . On introduit

$$Y_j = \left\{ \gamma \in \Gamma : B_\delta(\gamma.x) \subset \{\rho = f_j\} \cap \{t \leq f_j \leq t + \sqrt{t}\} \right\}.$$

Alors à distance  $\leq \delta$  de  $Y_j.x$ ,  $|d(\chi_t \circ f_j)|$  est constante égale à  $t^{-1/2}$ . D'après le lemme 4.21,

$|Y_j|$  est tel que

$$\int_{X_j} |d\chi_t \circ f_j| \sim t^{-1/2} \|\alpha_j\|_1 |Y_j|.$$

D'un autre côté, en posant  $W_j := \{\gamma \in \Gamma : B_\delta(\gamma.x) \subset V_j \text{ et } t \leq |\gamma|_1^* \leq t + \sqrt{t}\}$ , alors

$$|Y_j| \sim |W_j| \sim \sqrt{t} |\beta_j|_1^{-1} \int_{R_j} |d(\chi_t \circ \beta_j)|_1,$$

soit encore

$$\int_{X_j} |d(\chi_t \circ f_j)| \sim \frac{\|\alpha_j\|_{L^1(V)}}{|\beta_j|_1} \int_{R_j} |d(\chi_t \circ \beta_j)|_1.$$

On atteint finalement (4.25) en se souvenant que  $\alpha_j$  est  $\varepsilon$ -presque minimisante pour la norme  $L^1$  dans sa classe de cohomologie, puis en sommant sur  $j$ .  $\square$

Pour finir, nous allons introduire un domaine presque minimisant pour le problème isopérimétrique dans  $X$ , de volume et de forme comparables à celui de  $B_t$  dans  $R_\Gamma$ , défini comme un ensemble de niveau de la fonction  $\tilde{u}_t$ . Il résulte de la formule de la coaire que d'une part

$$\int_X d\tilde{u}_t = \int_0^1 \mu_F\{\tilde{u}_t = s\}, \quad (4.26)$$

pour  $F$  l'intégrand dual de l'intégrand de Poincaré sur  $X$ , et d'autre part

$$\int_{R_\Gamma} |du_t|_1 = t^{-1/2} \int_{t \leq |\cdot|_1^* \leq t + \sqrt{t}} 1 = t^{-1/2} \int_t^{t+\sqrt{t}} \mathbf{M}(I_{\partial B_s}) ds \sim \mathbf{M}(I_{\partial B_t}). \quad (4.27)$$

En particulier, à partir de (4.26) on obtient que pour un certain  $s \in (0, 1)$ , le volume de l'ensemble de niveau  $\{\tilde{u}_t = s\}$  doit être plus petit que la valeur de l'intégrale, soit  $\|d\tilde{u}_t\|_{L^1}$ . On définit ainsi  $D_t := \{\tilde{u}_t \leq s\}$ . Alors

$$\mathbf{M}(I_{D_t}) \sim \text{vol}(B_t),$$

tandis que  $\mathbf{M}(I_{\partial D_t}) \sim \text{vol}(\partial B_t)$  d'après le lemme 4.24 et la formule de la coaire. Finalement, si  $|\cdot|_1^*$  n'est pas polyédrale, on peut l'approcher avec une précision arbitraire par des normes polyédrales  $|\cdot|_{1,i}^*$ , et reproduire la construction précédente. Quitte à utiliser ensuite la sous-additivité de la fonction  $I$ , comme dans [Pan99] p.647, ceci permet de conclure.

#### 4.4 Une propriété de semi-continuité

Soit  $R$  un espace vectoriel muni d'une forme volume invariante  $\omega$ ,  $E$  un réseau de covolume 1. On munit  $R$  d'une métrique finslérienne  $E$ -invariante, et de l'intégrand  $F$  correspondant à cette métrique ainsi qu'à  $\omega$ .

*Remarque 4.28.* Si la métrique considérée est riemannienne et donne un volume 1 à  $T = R/E$ , on peut librement supposer que  $\omega$  est sa forme volume. En effet, deux formes volumes ayant même volume total sont différentiablement équivalente sur une variété compacte connexe (voir [Thu97], problème 3.1.16).

On désigne par  $\mathbf{M}$  la masse sur les  $n - 1$ -courants définie selon  $F$ . Pour tout  $t > 0$  on désigne par  $\delta_t$  l'homothétie de rapport  $t$  dans  $R$ , et pour tout courant entier  $C$  de dimension  $n - 1$ ,

$$\mathbf{M}_t(C) := t^{1-n} \mathbf{M}((\delta_t)_\# C).$$

Enfin,  $\mathbf{M}_\infty$  est par définition la masse mesurée pour l'intégrand correspondant à  $|\cdot|_1$  sur  $H^1(T, \mathbb{R}) \simeq R^*$  via l'isomorphisme  $\Psi_\omega$  défini en 1.1.2. On l'appelle masse limite.

**Proposition 4.29** ([Pan99], § 6). *Soit  $(t_j)$  une suite réelle de limite  $+\infty$ , et soit  $C_j$  une suite de courants entiers sur  $R$ . On suppose qu'il existe un courant  $C$  tel que  $C_j \xrightarrow{b} C$ . Alors*

$$\mathbf{M}_\infty(C) \leq \liminf_j \mathbf{M}_{t_j}(C_j). \quad (4.30)$$

La suite de 4.4 est dévolue à la preuve de cette proposition.

#### 4.4.1 Courants $k$ -rationnels

Soit  $R$  un espace vectoriel réel de dimension  $n$ ,  $E$  un réseau,  $\pi$  la projection de  $R$  sur  $T = R/E$ .

**Définition 4.31.** *Soit  $k$  un entier naturel non nul. Un courant entier de dimension  $n - 1$  sur  $R$  est dit  $k$ -rationnel s'il est combinaison linéaire finie de courants d'intégration  $P_i$  sur des parallélotopes  $\Pi_i$  égaux ou disjoints vérifiant :*

$$\partial\{(\pi \circ \delta_k)_\# P_i\} = 0 \quad (4.32)$$

où  $\delta_k$  désigne l'homothétie vectorielle de  $R$  de rapport  $k$ .

Autrement dit, il est requis que les vecteurs dirigeant le support des  $P_i$  soient à coordonnées rationnelles dans une base de  $E$ , avec des dénominateurs divisant  $k$ , afin que le courant dilaté par  $\delta_k$  se referme quand on le projette dans le tore  $T$ .

Cette définition de courant est un peu plus légère que celle adoptée par Pansu, qui envisage des courants  $(k, \varepsilon)$ -rationnels (qui sont des courants  $\varepsilon$ -proches en masse d'un courant rationnel, et dont la partie non rationnelle est maintenue à distance). Comme dans [Pan99], notre preuve de 4.29 résulte de l'association de deux lemmes : 4.33 (qui traite du cas où la limite est  $(k, \varepsilon)$ -rationnelle) lemme 4.37 qui est un résultat d'approximation. En revanche, nous donnons de 4.33 une preuve légèrement différente, adaptée de [Fed69] 5.1.5 là où [Pan99] utilisait des arguments de transversalité.

#### 4.4.2 Cas de la limite rationnelle

**Lemme 4.33.** *Soit  $C$  un courant  $k$ -rationnel. Soit  $(C_j)_j$  une suite de courants entiers de codimension 1 sur  $R$  tels que  $C_j \rightarrow C$  en norme  $b$ . Alors si  $(t_j)_j$  est une suite de multiples de  $k$  tendant vers l'infini,*

$$\mathbf{M}_\infty(C) \leq \liminf_j \mathbf{M}_{t_j}(C_j) \quad (4.34)$$

Ce lemme a la fonction du lemme 24 de [Pan99].



*Démonstration.* Suivant [Fed69], on désignera par  $C \lfloor X$  le courant  $C \lfloor \mathbf{1}_X$ , et si  $v : R \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction  $K$ -Lipschitzienne, on définit la tranche de  $C$  selon  $v$  à la valeur  $r \in \mathbb{R}$  comme

$$\langle C, v, r+ \rangle = \partial(C \lfloor \{x : v(x) \leq r\}) - (\partial C) \lfloor \{x : v(x) \leq r\}.$$

Le courant<sup>21</sup>  $\langle C, v, r+ \rangle$  est supporté sur la portion de l'ensemble de niveau  $v^{-1}(r)$  intersectant le support de  $C$ . En particulier, si  $C$  un courant d'intégration et  $r$  valeur régulière de  $v|_{\text{spt}(C)}$ , sa tranche de niveau  $r$  est un courant d'intégration sur une sous-variété orientée.

Soit  $C = P_1 + \dots + P_r$  la décomposition du courant  $k$ -rationnel limite  $C$  suivant la définition. On introduit des fonctions  $u_i$  définies au voisinage des support des  $P_i$  admettant une même constante de Lipschitz  $K$  de sorte que  $P_i = C \lfloor \{u_i \geq 0\}$ . Ceci est possible, car les  $P_i$  ont été supposés à supports disjoints. Nous allons utiliser les fonctions  $u_i$  afin de construire des courants  $S_{ij}$  qui diffèrent chacun d'un bord par rapport à  $P_i$ , tout en étant proches de réaliser une partition des  $C_j$ , dans le sens où  $\mathbf{M}(\sum_i S_{ij} - C_j)$  est petit.

Par hypothèse,  $C_j \rightarrow C$  en norme  $\|\cdot\|_b$ ; d'après la proposition 2.36, on dispose pour tout  $j$  de courants  $X_j$  et  $Y_j$  tels que  $C_j - C = X_j + \partial Y_j$ , avec  $\mathbf{M}(X_j) + \mathbf{M}(Y_j) \rightarrow 0$  quand  $j \rightarrow +\infty$ . Alors d'après [Fed69], 4.2.1,

$$\int_a^b \mathbf{M}(Y_j, u_i, s^+) ds \leq K \mathbf{M}(Y_j), \quad (4.35)$$

pour tous  $a, b \in \mathbb{R}$ . Posons  $\varepsilon_j = \sqrt{\mathbf{M}(Y_j)}$ . Écrivant l'intégrale (4.35) entre  $a = 0$  et  $b = \varepsilon_j$ , on trouve qu'il existe une tranche pour laquelle la masse est plus petite que sa valeur moyenne; autrement dit, pour tout  $j$  un nombre  $s_j > 0$  tel que

$$\mathbf{M}(Y_j, u, s_j+) \leq \frac{K \mathbf{M}(Y_j)}{\varepsilon_j} = K \sqrt{\mathbf{M}(Y_j)}.$$

On pose alors  $Z_{ij} := P_i \lfloor \{0 \leq u_i \leq s_j\}$ . Alors  $\mathbf{M}(Z_{ij}) \leq K s_j \mathbf{M}(\partial P_i) \leq K \varepsilon_j \mathbf{M}(\partial P_i)$ . On écrit aussi  $A_{ij} = \{u_i \geq s_j\}$ . Calculons :

$$\begin{aligned} C_j \lfloor A_{ij} &= (C + X_j + \partial Y_j) \lfloor A_{ij} \\ &= P_i \lfloor A_{ij} + X_j \lfloor A_{ij} - \langle Y_j, u_i, s_j+ \rangle + \partial \{Y_j \lfloor A_{ij}\} \end{aligned}$$

On définit  $S_{ij} := Z_{ij} + \langle Y_j, u_i, s_j+ \rangle + C_j \lfloor A_{ij} - X_j \lfloor A_{ij} = Z_{ij} + P_i \lfloor A_{ij} + \partial \{Y_j \lfloor A_{ij}\}$  Alors on dispose des deux propriétés suivantes :

(a)  $S_{ij}$  et  $P_i$  diffèrent d'un bord, en effet :

$$\begin{aligned} S_{ij} - P_i &= Z_{ij} + P_i \lfloor A_{ij} + \partial \{Y_j \lfloor A_{ij}\} - Z_{ij} - P_i \lfloor A_{ij} \\ &= \partial \{Y_j \lfloor A_{ij}\} \end{aligned}$$

---

21. Le + dans la notation est là pour indiquer que l'on considère les ensembles  $\{x : v(x) \leq r\}$  et non  $\{x : v(x) \geq r\}$  comme l'envisage aussi Federer ([Fed69], p. 395). Tant que  $r$  est valeur régulière de  $v$ , les deux conventions ne se distinguent pas.

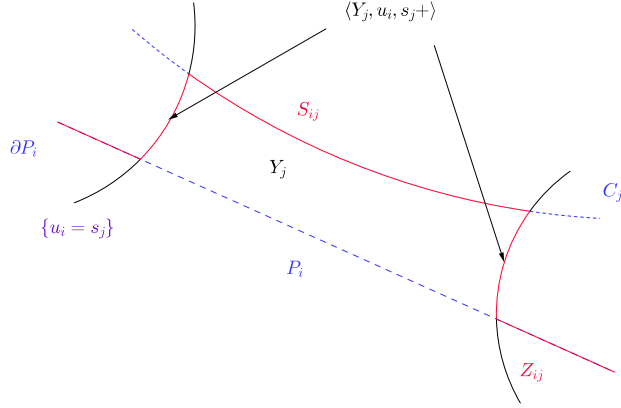


FIGURE 10 – Les courants  $P_i$  et  $S_{ij}$

(b)  $S_{ij}$  est proche de  $C_j \lfloor A_{ij}$  en masse, en effet :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}(S_{ij} - C_j \lfloor A_{ij}) &= \mathbf{M}(Z_{ij} + \langle Y_j, u_i, s_{j+} \rangle - X_j \lfloor A_{ij}) \\
 &\leq K\varepsilon_j \mathbf{M}(\partial P_i) + \frac{KM_j}{\varepsilon_j} + \mathbf{M}(X_j) \\
 &\leq K(1 + \mathbf{M}(\partial P_i)) \sqrt{\mathbf{M}(Y_j) + \mathbf{M}(x_j)}
 \end{aligned}$$

Il découle de (a) que les dilatés projetés dans le tore  $\pi \circ \delta_{t_j^\#} S_{ij}$  et  $\pi \circ \delta_{t_j^\#} P_i$  diffèrent encore d'un bord ; en particulier, pour  $t_j$  multiple de  $k$ , par définition  $P_i^{t_j} = \pi \circ \delta_{t_j^\#} P_i$  est un cycle, et  $S_{ij}^{t_j} = \pi \circ \delta_{t_j^\#} S_{ij}$  lui est homologue. Etant donné que la métrique finslérienne sur  $T_\infty$  est invariante par translation, le minimum de la masse dans la classe d'homologie de  $P_i^{t_j}$  est réalisé par  $P_i^{t_j}$ , d'après le lemme 3.38. Donc

$$\mathbf{M}_\infty(P_i) = \mathbf{M}_\infty^T(P_i^{t_j}) = \|[S_{ij}^{t_j}]\|_{T_\infty, \mathbb{R}} \stackrel{3.45}{=} \|[S_{ij}^{t_j}]\|_{T, \mathbb{R}} \leq \mathbf{M}_{t_j}(S_{ij}). \quad (4.36)$$

Finalement, en faisant la somme sur  $i$ , on obtient

$$\mathbf{M}_\infty(C) \leq \sum_i \mathbf{M}_{t_j}(S_{ij}),$$

d'une part ; d'autre part d'après (b), et en comparant les masses  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{M}_{t_j}$  on obtient

$$\mathbf{M}_{t_j}(C_j) \geq \sum_i \mathbf{M}_{t_j}(C_j \lfloor A_{ij}) \stackrel{(b)}{=} \sum_i \mathbf{M}_{t_j}(S_{ij}) + o(1).$$

Reprenant l'inégalité (4.36) et faisant  $j \rightarrow +\infty$ , on atteint la conclusion de 4.33.  $\square$

22. Cette observation joue le même rôle que la semi-ellipticité de l'intégrand exigée dans le théorème 5.1.5 de [Fed69]

### 4.4.3 Approximation par des courants $k$ -rationnels

**Lemme 4.37** (Approximation par des courants  $k$ -rationnels). *Soit  $C$  un courant entier de dimension  $n - 1$  sur  $R$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $k$  assez grand et un courant  $k$ -rationnel  $\tilde{C}$  pour le réseau  $E$  tel que  $\|C - \tilde{C}\|_{\mathfrak{b}} < \varepsilon$ .*

On rappelle que les chaînes simpliciales sur  $R$  sont denses dans les courants entiers pour la topologie  $\mathfrak{b}$ , d'après le corollaire 2.47 du théorème de déformation de Federer. Il reste à montrer que les courants rationnels sont  $\mathfrak{b}$ -denses dans les chaînes simpliciales. Soit  $C$  une chaîne simpliciale élémentaire, supportée sur un simplexe orienté  $\sigma$ . Soit  $\ell$  un grand entier; décomposons  $\sigma$  privé d'un petit voisinage d'une de ses faces en petits parallélotopes  $\{\pi_i\}$ , formés sur  $n - 1$  vecteurs dirigeant les côtés de  $\sigma$ , dilatés par un facteur  $1/\ell$ , comme sur la figure 11.

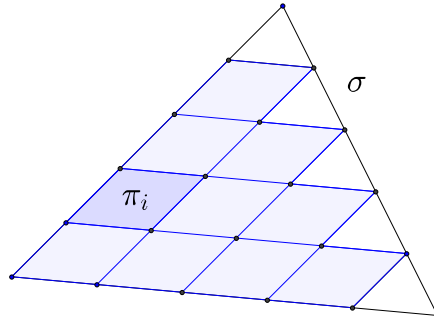


FIGURE 11 – Décomposition d'un simplexe élémentaire en petits parallélotopes dans la preuve du lemme 4.37.

Quitte à les rétracter très légèrement sur eux même, puis à les pivoter leur support très légèrement (ce qui coûte en masse, mais peu en norme  $\mathfrak{b}$ , cf. figure 6) les  $\pi_i$  deviennent disjoints et engendrés par des vecteurs à coordonnées rationnelles dans une base de  $E$ . Si  $k$  est un entier avec suffisamment de diviseurs, le courant approximant obtenu est  $k$ -rationnel.

### 4.4.4 Fin de la preuve

Ce qui suit est une reprise détaillée de [Pan99, 6.3]. Soit  $t_j$  une suite réelle de limite infinie et  $C_j$  une suite de  $n - 1$  courants entiers fermés sur  $R$ , telle que  $C_j \rightarrow C$  pour la norme  $\mathfrak{b}$ . Fixons  $\varepsilon > 0$ . Le lemme d'approximation 4.37 fournit un entier naturel  $k$  et un courant  $(k, \varepsilon)$ -rationnel  $\tilde{C}$  tels que  $\|C - \tilde{C}\|_{\mathfrak{b}} < \varepsilon/2$ .

**Lemme 4.38.** *Soit  $T$  un  $n - 1$  courant normal à support compact. L'application  $r \mapsto \delta_{r\sharp}T$  est continue pour la norme  $\mathfrak{b}$  à l'arrivée; plus précisément il existe une constante  $\kappa$  telle que pour  $r$  assez proche de 1,*

$$\|\delta_{r\sharp}T - T\|_{\mathfrak{b}} \leq \kappa \mathbf{N}(T) |r - 1|.$$

*Démonstration.* Soit  $K$  un compact tel que  $T \in \mathbf{F}_{n-1, K}(R)$ . Soit  $X$  le champ de vecteur radial  $X(v) = v$  sur  $R$ , et  $\varphi_t$  son flot. On suppose  $r > 1$  par symétrie. D'après la formule de

Cartan, pour toute  $\omega$  cochaîne  $\flat$  sur  $K$  de degré  $n - 1$ ,

$$\begin{aligned} (\delta_{r\#}T - T)\omega &= T(\delta_r^*\omega - \omega) = \int_0^{\log r} T(\mathcal{L}_X\varphi_t^*\omega) = \int_0^{\log r} T(d(X)\varphi_t^*\omega) + T(X)d\varphi_t^*\omega \\ &= \int_0^{\log r} \partial T(X)\varphi_t^*\omega + (T \wedge X)\varphi_t^*d\omega, \end{aligned}$$

où l'on rappelle que  $T \wedge X$  a été défini en 2.4. Si maintenant  $\rho > 0$  est pris assez grand pour que  $B(0, \frac{\rho}{r})$  contienne  $K$ , alors

$$\mathbf{M}^*(X)\varphi_t^*\omega \leq \rho \mathbf{M}^*(\varphi_t^*\omega); \quad (4.39)$$

$$\mathbf{M}(T \wedge X) \leq \rho \mathbf{M}(T). \quad (4.40)$$

D'où, en reprenant le calcul précédent,

$$|(\delta_{r\#}T - T)\omega| \leq \rho \int_0^{\log r} \mathbf{M}(\partial T)\mathbf{M}^*(\omega) + \mathbf{M}(T)\mathbf{M}^*(d\omega) \leq \rho \mathbf{N}(T)\|\omega\|_K^\flat |\log r|.$$

On conclut à l'aide de l'inégalité  $\log r \leq r - 1$  et la définition 2.34 de la norme  $\flat$ .  $\square$

Il existe donc  $\eta > 0$  tel que si  $r > 1$  est tel que  $r < 1 + \eta$ , alors pour tout  $j$ ,  $\|\delta_{r\#}C_j - C_j\|_\flat < \varepsilon/2$ . Soit  $t > k\frac{\eta+1}{\eta}$ ; on note  $\ell$  la partie entière de  $t/k$  et  $r = t/k\ell$ . Alors, pour  $r \in (1, 1 + \eta)$ , si  $j$  est assez grand,  $\|\delta_{r\#}C_j - \tilde{C}\|_\flat < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$ . D'après le lemme 4.33, pour  $j$  assez grand

$$\mathbf{M}_\infty(\tilde{C}) \leq \mathbf{M}_{k\ell}(\delta_{r\#}C_j) + \varepsilon,$$

D'où (avec  $t_j = r \cdot k\ell$ )

$$\mathbf{M}_\infty(\tilde{C}) \leq r^{n-1}\mathbf{M}_{t_j}(C_j) + \varepsilon.$$

Finalement, d'après le théorème 5.1.5 de [Fed69] ( $\mathbf{M}$  est inférieurement semi-continue pour la norme  $\flat$ ), quand  $\varepsilon$  tend vers 0,  $\liminf \mathbf{M}_\infty(\tilde{C}) \geq \mathbf{M}_\infty(C)$ .

## 4.5 Minoration du profil isopérimétrique

Ce qui suit correspond au § 7 dans [Pan99]. C'est ici qu'intervient le théorème de compacité 2.48. Rappelons que celui-ci requiert deux conditions : une borne uniforme sur la norme  $\mathbf{N}$  et un support commun, compact. C'est pourquoi nous avons besoin dans un premier temps du lemme 4.41, où l'on s'y ramène.

### 4.5.1 Réduction du support

**Lemme 4.41** ([Pan99], lemme 26). *Soit  $R$  un espace vectoriel,  $E$  un réseau de  $R$ .  $R$  est muni d'une métrique finslerienne  $E$ -invariante et d'un élément de volume invariant par translation. Il existe une constante  $\kappa > 0$  telle que pour tout  $\varepsilon > 0$  et pour tout courant entier  $C$  de dimension maximale sur  $R$ , il existe  $C'$  un courant entier de dimension maximale tel que :*

- $\mathbf{M}(C') = \mathbf{M}(C)$
- $\mathbf{M}(\partial C') \leq \mathbf{M}(\partial C) + \varepsilon \mathbf{M}(C)$

—  $C'$  est supporté dans une boule de rayon  $\frac{\kappa}{\epsilon}$

*Démonstration.* On suppose  $\epsilon' = 1/m$ , où  $m$  est un entier tel que  $2n\epsilon'^n \text{vol}(R/E) \leq \epsilon$ . Remplacer  $C$  par  $|C|$  ne change pas la masse et diminue la masse du bord ; c'est donc ce que l'on fera, et on supposera  $C$  positif à partir de maintenant. Le sous-réseau  $E' = mE \subseteq E$  détermine des pavages de  $R$  par des parallélotopes fermés : soit  $R = \cup_{w \in E'} (K + w)$  l'un d'entre eux, où  $K \ni 0$ , et  $G$  (comme "grille") l'union de leur faces (le  $n - 1$ -squelette). On désigne aussi par  $G_v$  le translaté  $G + v$  pour tout  $v \in R/E'$ . D'après la formule de la coaire,

$$\int_{R/E'} \mathbf{M}(C \cap G_v) dv = n\mathbf{M}(C).$$

De plus la fonction de  $v$  sous l'intégrande est continue ; d'après l'inégalité de la moyenne il existe  $v_0$  tel que

$$\mathbf{M}(C \cap G_{v_0}) \leq n\text{vol}(R/E')\mathbf{M}(C) = n\epsilon'^n \text{vol}(K)\mathbf{M}(C) \quad (4.42)$$

Pour tout  $w \in E'$ , désignons par  $C_w$  le courant  $v_0 - w + C \cap \{K + w - v_0\}$  ; puis  $C' = \sum_w C_w$ .  $C'$  est bien défini et  $\mathbf{M}(C') = \mathbf{M}(C)$  par convergence monotone. De plus la masse et la masse des bords (pour cette dernière, vue l'invariance de la métrique finslerienne par  $E$ ) sont invariantes par  $E'$ , d'où l'estimation de  $\mathbf{M}(\partial C')$  qui suit.

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\partial C') &\leq \sum_{w \in E'} \mathbf{M}(\partial C_w) \\ &\leq \sum_{w \in E'} \partial C \cap (K + w - v_0) + C \cap \partial(K + w - v_0) \\ &\leq \mathbf{M}(\partial C) + 2\mathbf{M}(C \cap G_{v_0}) \\ &\stackrel{(4.42)}{\leq} \mathbf{M}(\partial C) + 2n\epsilon'^n \text{vol}(K)\mathbf{M}(C) \leq \mathbf{M}(\partial C) + \epsilon\mathbf{M}(C). \end{aligned}$$

Le coefficient 2 à la troisième ligne vient du fait que chaque face borde deux parallélotopes et sa contribution est donc comptée deux fois dans la somme. Finalement,  $C'$  est à support dans  $K + K$ .  $\square$

#### 4.5.2 Minoration du profil isopérimétrique

Il s'agit de montrer

$$\liminf_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{I(\tau)}{I_\infty(\tau)} = 1 \quad (4.43)$$

Pour cela, on va invoquer une version homogène du théorème 2.48 de compacité, associée à l'argument de semi-continuité 4.29. Comme précédemment,  $R = H_1(T, \mathbb{R})$  est muni de deux métriques  $\tilde{T}$  qui est  $\Gamma$ -invariante et  $\tilde{T}_\infty$  qui est  $R$ -invariante, avec le même élément de volume. Soit  $(C_j)$  une suite de courants entiers de dimension  $n$ , de volumes  $\tau_j \rightarrow +\infty$  tels que

$$\frac{\mathbf{M}(\partial C_j)}{\tau_j^{(n-1)/n}} \longrightarrow \liminf_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{I(\tau)}{\tau^{(n-1)/n}}.$$

Ecrivons  $t_j = \tau_j^{1/n}$ , et posons  $D_j = \delta_{t_j^{-1}} C_j$ . D'après le lemme 4.41 de découpe, pour tout  $\varepsilon$  on peut trouver une suite de courants  $C'_j$  à support dans un même compact, tels que  $\mathbf{M}(C'_j) = \mathbf{M}(D_j)$  et dont la masse du bord est majorée par

$$\mathbf{M}_{t_j}(\partial C'_j) \leq (1 + \varepsilon) \mathbf{M}(D_j) \quad (4.44)$$

D'après le théorème de compacité 2.48, quitte à extraire une sous-suite des  $C'_j$  on peut supposer que  $C_j \rightarrow_b C$  tandis que  $\partial C_j \rightarrow_b \partial C$  pour un courant entier  $C$ . D'après la proposition 4.29,

$$\mathbf{M}_\infty(\partial C) \leq \liminf_j \mathbf{M}_{t_j}(\partial C'_j) \leq \limsup_j \mathbf{M}_{t_j}(\partial C'_j) \leq (1 + \varepsilon) \liminf_\tau \frac{I(\tau)}{\tau^{\frac{n-1}{n}}}.$$

Par ailleurs, puisque les  $C'_j$  sont de dimension maximale,  $\mathbf{M}_\infty(C) = \lim_j \mathbf{M}(C'_j) = 1$ . Donc  $I_\infty(1) \leq \mathbf{M}_\infty(\partial C) \leq \liminf_\tau \frac{I(\tau)}{\tau^{\frac{n-1}{n}}}$ . On conclut par homogénéité de  $I_\infty$ .

## 4.6 Convergence des domaines extrémaux

L'objectif est de démontrer le théorème 4.7, qui est une reformulation de la proposition 31 dans [Pan99] suivant la remarque 4.3. On procède pour cela par l'absurde; on se placera ici sous l'hypothèse que  $T$  est de volume 1, ce qui n'est pas restrictif. Supposons donc qu'il existe une suite  $(D_j)$  de domaines, presque extrémaux pour le problème isopérimétrique, telle que la suite des courants d'intégration  $C_j = I_{D_j}$  associés, translatés vers l'origine puis renormalisés, ne converge pas en topologie  $\flat$  vers  $I_B$  où  $B$  est la boule unité de  $|\cdot|_1^*$  sur  $\mathbb{H}_1(T, \mathbb{R})$ . D'après le paragraphe qui précède, il existe une sous-suite  $(C_{j_k})$  des  $C_j$ , et une limite  $C$  des  $C_{j_k}$  en topologie  $\flat$ , avec d'après la proposition 4.29

$$\mathbf{M}_\infty(\partial C) \leq \liminf \frac{\mathbf{M}(I_{\partial D_{j_k}})}{\mathbf{M}(I_{D_{j_k}})^{(n-1)/n}} = c_\infty,$$

la dernière égalité ayant lieu parce que les  $D_j$  on été supposés presque extrémaux. Mais alors, par unicité dans le cas d'égalité de l'inégalité de Brunn pour les ensembles de périmètre fini (qui a été obtenu par Taylor dans [Tay74]),  $C$  doit être une boule de  $|\cdot|_1^*$ . C'est une contradiction.

## 4.7 Discussion sur la constante isopérimétrique asymptotique

On s'intéresse ici à la dépendance de  $c_\infty$  par rapport à la métrique, et à l'intervalle des valeurs qu'elle peut prendre. Les cas  $n = 2$  et  $n > 2$  diffèrent de ce point de vue. Ceci a été remarqué par Burago et Ivanov [BI98] dans leur étude des invariants asymptotiques des surfaces (à défaut d'existence de la limite, la constante asymptotique de [BI98] est exprimée comme une limite supérieure).

### 4.7.1 Majoration de la constante isopérimétrique

**Théorème 4.45** ([Pan99]). *Pour tout tore riemannien  $T$  de dimension  $n$ ,*

$$c_\infty \leq n \mathcal{V} \left( \mathbb{H}^{n-1}(T, \mathbb{Z}), |\cdot|_{\frac{n}{n-1}} \right)^{1/n} \leq n \mathcal{V} \left( \tilde{T} \right)^{1/n}$$

*Remarque 4.46.* Rappelons que d'après la proposition 3.29, la norme  $L^{\frac{n}{n-1}}$  sur  $\mathbb{H}^{n-1}(T, \mathbb{R})$  (et donc le terme du milieu dans l'inégalité qui précède) est un invariant conforme.

*Démonstration.* Soit  $\phi$  une forme différentielle de degré  $n-1$  sur  $T$ . Si  $\nu$  est la forme volume riemannienne de  $T$ ,

$$\begin{aligned} \left( \int_T \mathcal{M}^*(\phi)^{\frac{n}{n-1}} \nu \right)^{\frac{n-1}{n}} &\leq \left( \int_T \|\phi\|_\infty^{\frac{n}{n-1}} \nu \right)^{\frac{n-1}{n}} \\ &= \|\phi\|_\infty \text{Vol}(T)^{\frac{n-1}{n}}, \end{aligned}$$

d'où l'inégalité entre volumes asymptotiques donnant la première majoration de la constante isopérimétrique

$$c_\infty \stackrel{4.6}{=} n \left( \mathcal{V} \left( \mathbb{H}^{n-1}(T, \mathbb{Z}), |\cdot|_\infty \right) \right)^{1/n} \leq n \left( \mathcal{V} \left( \mathbb{H}^{n-1}(T, \mathbb{Z}), |\cdot|_{\frac{n}{n-1}} \right) \right)^{1/n}.$$

D'autre part, toujours pour une  $n-1$  forme  $\phi$  sur  $T$ , l'inégalité de Hölder donne

$$\begin{aligned} \int_T \mathcal{M}^*(\phi)^{\frac{n-1}{n}} \nu &\leq \left( \int_T \mathcal{M}^*(\phi)^{\frac{n}{n-1}} \nu \right)^{\frac{n-1}{n}} \left( \int_T 1^n \nu \right)^{1/n} \\ &= \|\phi\|_{\frac{n}{n-1}} \text{Vol}(T)^{1/n}, \end{aligned}$$

d'où l'inégalité entre volumes asymptotiques

$$\mathcal{V} \left( \mathbb{H}^{n-1}(T, \mathbb{Z}), |\cdot|_{\frac{n}{n-1}} \right) \leq \text{Vol}(T) \mathcal{V} \left( \mathbb{H}^{n-1}(T, \mathbb{Z}), |\cdot|_1 \right).$$

L'isométrie donnée par la proposition 3.32 permet de réécrire ce volume asymptotique comme celui de la norme stable  $|\cdot|_{\mathbb{R}}$  sur  $\mathbb{H}_1(T, \mathbb{Z})$ . Ce dernier s'interprète géométriquement à l'aide de la proposition 3.24,

$$\text{Vol}(T) \mathcal{V} \left( \mathbb{H}_1(T, \mathbb{Z}), |\cdot|_{\mathbb{R}} \right) = \mathcal{V} \left( \tilde{T} \right).$$

□

### 4.7.2 La dimension deux

En dimension deux,  $\frac{n}{n-1} = 2$ . D'après le théorème d'uniformisation de Poincaré-Koebe, il n'y a qu'une seule classe conforme pour les métriques riemanniennes du 2-tore, celle de la métrique plate. Donc  $\mathcal{V}(\mathbb{H}^1(T, \mathbb{Z}), |\cdot|_2) = \pi$ , volume asymptotique du plan euclidien quelle

que soit la métrique sur  $T$ . La première inégalité établie par le théorème 4.45 devient alors

$$c_\infty \leq 2\sqrt{\pi}, \quad (4.47)$$

et y a égalité pour une métrique euclidienne. En plus grande dimension, une telle borne uniforme sur la constante isopérimétrique asymptotique n'existe pas, comme nous allons le montrer.

### 4.7.3 Grande constante isopérimétrique

**Proposition 4.48** ([Pan99], § 11). *Si  $n \geq 3$ , il existe des tores riemanniens de dimension  $n$  dont la constante isopérimétrique asymptotique  $c_\infty$  est arbitrairement grande.*

*Remarque 4.49.* On a montré (théorème 4.45) que  $c_\infty$  est majorée par un invariant conforme ; par conséquent si l'on souhaite obtenir une constante asymptotique arbitrairement grande, ceci ne peut se faire par changement conforme de métrique.

*Démonstration.* Sans normalisation du volume de  $T$ , la constante isopérimétrique asymptotique est

$$c_\infty = n \mathcal{V}(\mathbb{H}^{n-1}(T, \mathbb{Z}), |\cdot|_\infty)^{1/n} \text{Vol}(T)^{\frac{1-n}{n}}.$$

Partant de la métrique invariante standard  $g_0$  sur  $T = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ , nous allons chercher à augmenter  $\mathcal{V}(\mathbb{H}^{n-1}(T, \mathbb{Z}), |\cdot|_\infty)$  arbitrairement, tout en gardant  $\text{Vol}(T)$  proche de 1. En d'autres termes, il s'agit de rendre arbitrairement petite la norme  $|\cdot|_\infty$  sur  $\mathbb{H}^{n-1}(T, \mathbb{Z})$ .

Puisque  $n \geq 3$ , on peut trouver  $n$  1-cycles  $c_1, \dots, c_n$  associés à des géodésiques fermées  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  de longueur 1, sans intersections mutuelles et dont les classes d'homologie  $\overline{c_1}, \dots, \overline{c_n}$  engendrent toute l'homologie du tore (cf. figure 12 pour  $n = 3$ ).

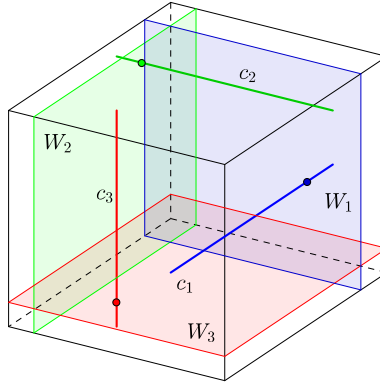


FIGURE 12 – 3 cycles sans intersection dans le tore de dimension 3

Pour tout  $\varepsilon > 0$ , soit  $U_{i,\varepsilon}$  le  $\varepsilon$ -voisinage (pour  $g_0$ ) du support de  $c_i$ . On suppose  $\varepsilon$  assez petit pour que les  $U_{i,\varepsilon}$  ne s'intersectent pas. Le tube  $U_i$  se décompose sous la forme  $U_i \simeq S^1 \times B^{n-1}(\varepsilon)$  ; à l'aide de cette décomposition, on installe dans  $U_i$  la métrique produit

$$g_{\varepsilon,i} = a_\varepsilon(r)^2 g_{S^1} + b_\varepsilon(r)^2 g_{B^{n-1}},$$



où  $r$  est la distance à  $c_i$  (pour  $g_0$ ) et  $a_\varepsilon, b_\varepsilon$  sont des fonctions lisses sur  $[0, 2\varepsilon)$ , constantes sur  $[0, \varepsilon/2)$  et égales à 1 au voisinage de  $\varepsilon$  telles que  $a_\varepsilon = \varepsilon^{n-1}$  et  $b_\varepsilon = \varepsilon^{-2}$  au voisinage de 0. On peut aussi supposer  $a_\varepsilon b_\varepsilon$  monotone, de sorte que  $a_\varepsilon b_\varepsilon \leq 1$ . Alors

$$\text{Vol}(g_{\varepsilon,i}) = \int_0^\varepsilon \nu_{n-2} r^{n-2} a_\varepsilon b_\varepsilon dr \leq \omega_{n-1} \varepsilon^{n-1}$$

où  $\nu_p$  désigne le volume de la  $p$ -sphère euclidienne, et  $\omega_p$  celui de la  $p$ -boule. Par conséquent, si  $g_\varepsilon$  désigne le recollement des  $g_{i,\varepsilon}$  dans les  $U_i$  et de  $g_0$  en-dehors,  $\text{Vol}(g_\varepsilon) \leq \text{Vol}(g_0) = 1$ , et  $c_\infty(g_\varepsilon) \geq n \mathcal{V}(\mathbb{H}^{n-1}(T, \mathbb{Z}), |\cdot|_{g_\varepsilon, \infty})$ . Nous allons montrer que cette dernière quantité tend vers  $+\infty$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Soit  $W_i$  un  $n-1$  cycle dont le support intersecte orthogonalement  $U_i$ , et dont le nombre d'intersection avec  $c_j$  est  $\delta_{i,j}$  exactement, cf. figure 12. Les classes d'homologie  $W_i$  forment une  $\mathbb{Z}$ -base de  $\mathbb{H}_{n-1}(T, \mathbb{Z})$ .

**Lemme 4.50.** *Avec les notations précédentes, soit  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  dans  $\mathbb{Z}^n$ , et  $W'$  un  $n-1$ -cycle entier de  $T$  homologue à  $\lambda_1 W_1 + \dots + \lambda_n W_n$ . Alors, si  $V_i$  est le  $\varepsilon/2$ -voisinage du support de  $c_i$ ,  $T$  étant muni de la métrique modifiée  $g_\varepsilon$ , il existe une constante  $\kappa$  telle que*

$$\mathbf{M}(W) \geq \kappa \varepsilon^{1-n} \sum_{i=1}^n |\lambda_i| \quad (4.51)$$

*Démonstration.* Pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , soit  $\text{pr}_i$  la projection de  $T$  sur le support de  $W_i$  parallèlement à  $c_i$ . Alors  $\text{pr}_i|_{\text{spt}(W|V_i)}$  est de degré  $\lambda_i$ , et diminue localement le volume. Donc

$$\mathbf{M}(W|V_i) \geq |\lambda_i| \mathbf{M}(W_i|V_i). \quad (4.52)$$

Finalement, il reste à minorer le terme de droite de (4.52) et à sommer sur  $i$ . Pour cela observons que

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(W_i|V_i) &= \text{Vol}(g_\varepsilon|_{\text{spt}(W_i|V_i)}) = \int_0^{\varepsilon/2} \nu_{n-2} r^{n-2} b_\varepsilon(r)^{n-1} dr \\ &= \omega_{n-1} \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{n-1} \varepsilon^{-2(n-1)} = \kappa \varepsilon^{1-n} \end{aligned}$$

Avec  $\kappa := 2^{1-n} \omega_{n-1}$ . Puisque les  $V_i$  sont disjoints,

$$\mathbf{M}(W) \geq \sum_{i=1}^n \mathbf{M}(W|V_i) \stackrel{(4.52)}{\geq} \sum_{i=1}^n |\lambda_i| \mathbf{M}(W_i|V_i) \geq \kappa \varepsilon^{1-n} \sum_{i=1}^n |\lambda_i|. \quad \square$$

Le lemme 4.50 permet de minorer la norme stable sur  $\mathbb{H}_{n-1}(T, \mathbb{Z})$  pour la métrique  $g_\varepsilon$  : si  $\alpha$  est la classe d'homologie de  $\sum_i \lambda_i W_i$ , alors

$$|\alpha|_{\mathbb{R}} \geq \kappa \varepsilon^{1-n} \sum_i |\lambda_i|.$$

D'après la proposition 3.31, cette norme est duale de  $|\cdot|_\infty$  sur  $\mathbb{H}^{n-1}(T, \mathbb{R})$ . On en déduit donc que si  $\phi$  est la  $n-1$ -forme associée à  $\lambda_1 c_1 + \dots + \lambda_n c_n$  par dualité de Poincaré,  $|\phi|_\infty \leq \kappa \varepsilon^{1-n} \sup_i |\lambda_i|$ . On a ainsi rendu  $|\cdot|_\infty$  sur  $\mathbb{H}^{n-1}(T, \mathbb{Z})$  arbitrairement petite, ce qui était

l'objectif recherché. □

## 4.8 Vers une preuve dans le cas général

Cette sous-section est une tentative de preuve des conjectures établies en 4.2.2. Elle n'est pas complète.

### 4.8.1 Inégalité isopérimétrique relative

**Lemme 4.53.** *Soit  $X$  une variété riemannienne orientée de dimension  $n$ ,  $F \subset X$  un domaine à bord lisse par morceaux, connexe et compact. Il existe une constante  $c_F > 0$  telle que pour toute  $T \in \mathbf{F}_{n,F}(X)$ ,*

$$\inf_{\lambda \in \mathbb{R}} \|T - \lambda I_F\|_{\flat} \leq c_F \|\partial T\|_{\flat}, \quad (4.54)$$

où les normes  $\flat$  sont mesurées relativement aux densités riemanniennes.

*Remarque 4.55.* Par définition de la norme  $\flat$ ,  $\|\partial T\|_{\flat} \leq \mathbf{M}(\partial T)$ . Comme  $T$  est de dimension maximale, (4.54) implique aussi

$$\inf_{\lambda \in \mathbb{R}} \mathbf{M}(T - \lambda I_F) \leq c_F \mathbf{M}(\partial T) \quad (4.56)$$

*Démonstration.* La conclusion (4.54) revient à affirmer que  $\partial_n : \mathbf{F}_n(\text{int}F) \rightarrow \mathbf{F}_{n-1}(\text{int}F)$  est un opérateur d'image fermée dont le noyau est exactement  $\mathbb{R}I_F$ . Soit encore, que  $\ker \partial_n \simeq \mathbb{R}$  et  $\mathbf{F}_{n-1,F}(X)/\text{Im} \partial_n$  est séparé. Or d'après 2.56, le complexe  $(\mathbf{F}_*, \partial)$  calcule l'homologie  $H_*(F, \partial F, \mathbb{R})$ . En particulier,

1. D'après la dualité de Poincaré

$$H_n(F, \partial F, \mathbb{R}) \simeq H^0(F, \partial F, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R},$$

puisque  $F$  est connexe, et

2.  $H_{n-1}(F, \partial F, \mathbb{R})$  est un espace de dimension finie (en particulier il est donc séparé).

Ceci termine la démonstration. □

Rappelons que  $\mathbf{I}_{n,F}^+(X)$  désigne l'espace des courants entiers positifs à support dans  $F$ . Le lemme 4.53 sert à établir le

**Lemme 4.57** (Inégalité isopérimétrique relative). *Sous les hypothèses précédentes, soit  $I_F = T + S$  une décomposition de  $I_F$  avec  $S, T \in \mathbf{I}_{n,F}^+(X)$ . Alors*

$$\min(\mathbf{M}(T), \mathbf{M}(S)) \leq c'_F \mathbf{M}(\partial T).$$

*Démonstration.* Puisque  $\mathcal{M}(S + T) \equiv 1$  sur  $F$  et  $\mathcal{M}(S) \in \{0, 1\}$  presque partout sur  $F$ ,

$$\mathbf{M}(\lambda S + (1 - \lambda)T) = \lambda \mathbf{M}(S) + (1 - \lambda) \mathbf{M}(T),$$

et le minimum d'une fonction affine sur un intervalle fermé est atteint à l'une des bornes. □

*Remarque 4.58.* Pour  $F$  isométrique à  $B^n$ , on peut prendre  $2^{n+1}$  pour la constante  $c'_F$ , cf. [Gro07] 6.22.

## 4.8.2 Transport de courants par discrétisation entre $\Gamma$ -variétés

Soient  $X$  et  $X'$  deux variétés riemanniennes orientées munies d'actions libres, discrètes, co-compactes et isométriques d'un même groupe  $\Gamma$ .

**Lemme 4.59.** *Il existe pour ces actions des domaines fondamentaux connexes à bord lisse par morceaux.*

Dans la suite, on fixera  $F$  et  $F'$  deux tels domaines, respectivement pour  $\Gamma \curvearrowright X$  et  $\Gamma \curvearrowright X'$ .

*Démonstration.* Il existe une triangulation lisse et finie  $\mathcal{T}$  du quotient  $X/\Gamma$ . Ecrivons  $\Delta_1, \dots, \Delta_p$  ses simplexes élémentaires, ordonnés de telle sorte que pour tout  $i \in \{2, \dots, p\}$ ,  $\Delta_i$  partage une  $n-1$ -face avec l'un des  $\Delta_j$  pour  $j < i$ . On choisit des relèvements  $\tilde{\Delta}_1, \dots, \tilde{\Delta}_p$  dans  $X$  des simplexes  $\Delta_i$ . On construit par récurrence une suite  $(\gamma_i)_{2 \leq i \leq p}$  d'éléments de  $\Gamma$  telle que pour tout  $i \in \{2, \dots, p\}$  il existe  $\gamma_i$  tel que  $\gamma_i \tilde{\Delta}_i$  partage une  $n-1$  face avec l'un des  $\gamma_j \tilde{\Delta}_j$  pour  $j \leq i$ . Finalement, on pose  $F = \sqcup_i \gamma_i \tilde{\Delta}_i$ .  $\square$

**Définition 4.60.** *Soit  $F$  un domaine fondamental pour  $\Gamma \curvearrowright X$  tel que précédemment. Pour tout  $D$  courant entier de dimension maximale sur  $X$ , on pose*

$$A := \left\{ \gamma \in \Gamma : \|D\|(\gamma F) \geq \frac{|F|}{2} \right\},$$

puis  $\tau(D) = A_{\#} I_{F'}$ .

La proposition qui suit exprime que la masse des courants dont le bord est petit est presque préservée lors du transport  $\tau$ .

**Proposition 4.61.** *Soit  $D$  un courant entier de  $X$ . Alors, quand  $\mathbf{M}(\partial D)/\mathbf{M}(D)$  tend vers 0,*

$$\frac{\mathbf{M}(\tau(D))}{\mathbf{M}(D)} \sim \frac{|F'|}{|F|}. \quad (4.62)$$

*Démonstration de la proposition 4.61.* Quitte à appliquer un facteur de renormalisation aux métriques riemanniennes de  $X$  et  $X'$ , on peut supposer que  $|F| = |F'| = 1$ . Il s'agit alors de vérifier  $|A| \sim |D|$  sous les hypothèses de la proposition. Fixons  $\varepsilon > 0$ , et introduisons les sous-ensembles  $A_\varepsilon, B_\varepsilon$  de  $\Gamma$  suivants.

$$\begin{aligned} A_\varepsilon &:= \{ \gamma \in \Gamma : 1 - \varepsilon \leq \|D\|(\gamma F) \}, \\ B_\varepsilon &:= \{ \gamma \in \Gamma : \varepsilon \leq \|D\|(\gamma F) < 1 - \varepsilon \}. \end{aligned}$$

Si  $\varepsilon \leq 1/2$ ,  $A_\varepsilon$  et  $A_\varepsilon \cup B_\varepsilon$  encadrent  $A$ . On va s'en servir pour estimer  $\mathbf{M}(\tau(D)) = |A|$ .

**Majoration de  $\mathbf{M}(\tau(D))$**  Par définition de  $A_\varepsilon$ ,  $(1-\varepsilon)|A_\varepsilon| \leq \mathbf{M}(D)$ . D'autre part, d'après le lemme 4.57, il existe une constante  $c_F > 0$  telles que pour tout  $\gamma \in B_\varepsilon$ ,  $\varepsilon \leq c_F \mathbf{M}(\partial D[\gamma F])$ , d'où, en sommant sur  $\gamma \in B_\varepsilon$ ,  $|B_\varepsilon| \leq c_F \frac{\mathbf{M}(\partial D)}{\varepsilon}$ . Donc

$$\mathbf{M}(\tau(D)) \leq \frac{\mathbf{M}(D)}{1 - \varepsilon} + c_F \frac{\mathbf{M}(\partial D)}{\varepsilon}.$$

**Minoration de  $\mathbf{M}(\tau(D))$**  Appliquant encore le lemme 4.57, on obtient

$$\mathbf{M}(\tau(D)) \geq |A_\varepsilon| \geq \mathbf{M}(D) - \frac{c_F}{\varepsilon} \mathbf{M}(\partial D),$$

ce qui permet de conclure.  $\square$

**Proposition 4.63.** *Soient  $X$  et  $X'$  deux variétés riemanniennes munies d'une action libre, discrète, par isométries, co-compactes d'un même groupe  $\Gamma$ , et  $\tau : \mathbf{I}_{\dim X}(X) \rightarrow \mathbf{I}_{\dim X'}(X')$  l'application de transport définie en 4.60. Alors il existe une constante  $c > 0$  telle que pour tous courants entiers  $D$  sur  $X$  et  $D'$  sur  $X'$  de dimensions maximales,*

$$\mathbf{M}(D - \tau'(D')) \leq c(\mathbf{M}(\tau(D) - D') + \mathbf{M}(\partial D) + \mathbf{M}(\partial D')). \quad (4.64)$$

*Démonstration.* Observons que si  $G$  est un graphe de Cayley de  $\Gamma$ , l'application  $\tau$  se factorise sous la forme  $\tau = \tau_2 \circ \tau_1$ , où  $\tau_1$  associe à  $D \in \mathbf{I}_{\dim X}(X)$  un sous-ensemble  $A$  des sommets de  $G$ , et  $\tau_2$  associe à un ensemble de sommets de  $G$  la réunion de translatés correspondants du domaine fondamental. Nous allons établir (4.64) pour  $\tau_1$  et  $\tau_2$ , où  $G$  est le graphe de Cayley formé sur le système générateur

$$S := \{\gamma \in \Gamma : \gamma F \cap F \neq \emptyset\},$$

et où les bords sont mesurés dans  $G$ , et on remplace  $\mathbf{M}(X - Y)$  par  $|X \Delta Y|$ , où  $\Delta$  est l'opérateur de différence symétrique sur les parties finies de l'ensemble  $V_G$  des sommets de  $G$ .

On fera dans la suite l'abus de notation consistant à confondre  $V_G$  et  $\Gamma$ . En particulier, pour  $P \subset V_G$  et  $S$  un courant on écrira  $P_\# S = \sum_{\gamma \in P} \gamma_\# S$ .

**1er cas : preuve de (4.64) pour  $\tau_1$**  Rappelons que pour  $A \subset V_G$ ,  $\tau_1(A) = AF'$  tandis que pour  $D' \in \mathbf{I}_{\dim X'}(X')$ ,  $\tau'_1(D') = \left\{ \gamma \in \Gamma : \|D'\|(\gamma F') \geq \frac{|F'|}{2} \right\}$ . On notera ce dernier ensemble  $A'$ . Alors

$$\begin{aligned} |F'| |A \Delta A'| &= \mathbf{M}(A_\# I_{F'} - A'_\# I_{F'}) \leq \mathbf{M}(A_\# I_{F'} - D') + \mathbf{M}(D' - A'_\# I_{F'}) \\ &\leq \mathbf{M}(A_\# I_{F'} - D') + 2c \mathbf{M}(\partial D') \end{aligned}$$

**2e cas : preuve de (4.64) pour  $\tau_2$**  Le courant  $A_\# I_{F'} - D$  est supporté sur la réunion de  $\text{spt}(D) \setminus AF$  et de  $AF \setminus \text{spt}(D)$ , que nous allons traiter successivement. Soit

$$B := \{\gamma \in \Gamma \setminus A : \gamma F \cap \text{spt}(D) \neq \emptyset\}.$$

Pour tout  $\gamma \in B$ ,  $\|D\|(\gamma F) < \frac{|F|}{2}$ , donc d'après le lemme 4.57,  $\|D\|(\gamma F) \leq c_F \mathbf{M}(\partial D|_{\gamma F})$ . Puisque  $\text{spt}(D) \setminus AF \subset BF$ , en sommant sur  $\gamma \in B$  ceci entraîne

$$\mathbf{M}(D - A_\# I_F) \leq c_F \mathbf{M}(\partial D|_{BF}) \leq c_F \mathbf{M}(\partial D). \quad (4.65)$$

Si maintenant  $B' = \{\gamma \in A : \gamma F \setminus \text{spt}(D) \neq \emptyset\}$ , alors  $AF \setminus \text{spt}(D) \subset B'F$ . Pour tout

$\gamma \in B'$ ,  $\|D\|(\gamma F) \geq \frac{|F|}{2}$  donc  $\|(I_X - D)\|(\gamma F) \leq c_F \mathbf{M}(\partial D \lfloor \gamma F)$ . Par conséquent

$$\|I_X - D\|(AF) \leq \mathbf{M}(D \lfloor B'F) \leq c_F \mathbf{M}(\partial D \lfloor B'F) \leq c_F \mathbf{M}(\partial D). \quad (4.66)$$

En sommant (4.65) et (4.66), on obtient  $\mathbf{M}(D - A_{\#}I_F) \leq 2c_F \mathbf{M}(\partial C)$ ; puis d'après l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(D - A'_{\#}I_F) &\leq \mathbf{M}(D - A_{\#}F) + \mathbf{M}(A_{\#}F - A'_{\#}F) \\ &= \mathbf{M}(D - A_{\#}F) + |A\Delta A'| |F| \\ &\leq |F| |A\Delta A'| + 2c_F \mathbf{M}(\partial D). \end{aligned} \quad \square$$

### 4.8.3 Semi-continuité

Nous cherchons ici à reproduire le raisonnement de 4.4 dans le cadre plus général où  $X$  est quelconque munie d'une action géométrique de  $\Gamma \simeq \mathbb{Z}^d$ . On conservera les notations de la sous-section précédente, avec ici  $X' = \Gamma \otimes \mathbb{R}$ ,  $\Gamma$  opérant par translations comme un réseau dans  $X'$ .

**Lemme 4.67.** *Soit  $\Lambda$  un groupe de type fini opérant géométriquement sur une variété riemannienne, et  $\pi$  la projection  $Y \rightarrow Y \setminus \Lambda$ . Il existe un domaine fondamental  $D$  pour l'action de  $\Lambda$  sur  $Y$ , connexe à bords lisses par morceaux, et tel que  $\partial\{\pi_{\#}I_D\} = 0$ .*

*Démonstration.* Reprenons la construction du lemme 4.59, et relevons à  $X$  une triangulation de  $\Lambda \setminus Y$ . On peut prendre pour  $D$  une union de  $n$ -simplexes de la triangulation. Le bord  $\partial I_D$  est supporté sur des  $n - 1$  faces de la triangulation. Chacune de ces faces  $F$  délimite deux  $n$ -simplexes  $S_1$  et  $S_2$ ; l'un d'entre eux exactement, disons  $S_1$ , est contenu dans  $D$ , et il existe alors un unique  $\lambda \in \Lambda$  tel que  $\lambda S_2 \subset D$ . Les orientations de  $I_{S_1}$  et  $I_{S_2}$  induites sur  $F$  se compensent :

$$(\partial I_{S_1} + \partial \lambda_{\#} I_{S_2}) \lfloor F = 0.$$

En sommant sur toutes les faces de  $D$ , on trouve que le courant  $\pi_* I_D$  est fermé.  $\square$

Soit  $D_j$  une suite de courants entiers de dimension maximale sur  $X$ , et  $t_j = \mathbf{M}(D_j)^{1/d}$ . On supposera aussi que

$$\mathbf{M}(\partial D_j) = \mathcal{O}(t_j^{d-1}), \quad (4.68)$$

ce qui est possible d'après [Gro07] 6.19 et l'inégalité isopérimétrique dans  $\Gamma$ . Les courants  $\tau(D_j)$  sont entiers et de dimension maximale sur  $X'$ . Quitte à les translater par  $\Gamma$ , puis à extraire une sous-suite, on peut supposer que les  $\delta_{t_j^{-1}\#} \tau(D_j)$  convergent en norme  $\flat$  – donc en masse – vers  $D$ , courant entier de dimension maximale sur  $\Gamma \otimes \mathbb{R}$ . Fixons  $\varepsilon > 0$ . Il existe  $k$  assez grand et  $D'$  tel que  $\partial D'$  est  $(k, \varepsilon)$  rationnel (à distance  $\mathbf{M}$  plus petite que  $\varepsilon$  d'un courant  $k$ -rationnel) et  $\mathbf{M}(\partial D - \partial D') < \varepsilon$ . Posons  $D'_j = \delta_{t_j\#} D'$ ; alors

$$\mathbf{M}(\tau(D_j) - D'_j) = t_j^d \mathbf{M}(\delta_{t_j^{-1}\#} \tau(D_j) - D') \leq t_j^d (\mathbf{M}(\delta_{t_j^{-1}\#} \tau(D_j) - D') + \varepsilon).$$

Donc, pour  $j$  assez grand,

$$\mathbf{M}(\tau(D_j) - D'_j) < 2\varepsilon t_j^d. \quad (4.69)$$

Rappelons aussi que par définition,  $\partial D' = \sum_i P_i + U$  où  $\mathbf{M}(U) < \varepsilon$  et les  $P_i$  sont supportés sur des parallélépipède disjoints de codimension 1, tels que le support de  $\delta_{k\sharp} P_i$  a des sommets dans  $\Gamma$ . Il existe en outre des ensembles  $A_i$  disjoints et des fonctions lipschitziennes  $u_i$  tels que  $A_i = \{u_i \geq 0\}$  et  $P_i = (\partial D') \lfloor A_i$ .

On suppose dorénavant que les  $t_j$  sont des multiples entiers de  $k$ . Nous cherchons à définir des courants entiers  $P_{ij}$  dans  $X$ , analogues aux  $\delta_{t_j\sharp} P_i$ . Puisque l'on sait transporter les courants seulement en dimension maximale de  $X'$  vers  $X$ , on va identifier  $\delta_{t_j\sharp} P_i$  au bord d'un courant de dimension  $d = \text{rg}\Gamma$ , puis transporter ce courant dans  $X$  avant de considérer son bord. Plus précisément : Soit  $H_{ij}$  l'hyperplan affine engendré par le support de  $\delta_{t_j\sharp} P_i$ , et  $Q_{ij}$  l'un des demi-espaces bordés par  $H_{ij}$ , dont on suppose qu'il contient l'origine. On définit alors

$$H_{ij}^X := \partial\tau'(I_{Q_{ij}}),$$

où  $Q_{ij}$  est orienté de telle manière que l'orientation de bord de  $H_{ij}$  est compatible avec  $\delta_{t_j\sharp} P_i$ . On définit  $\Gamma_i$  comme le sous-groupe  $\overrightarrow{H_{ij}} \cap \Gamma$  de  $\Gamma$  stabilisant  $H_{ij}$ . Puisque la direction de  $H_{ij}$  ne dépend pas de  $j$ ,  $\Gamma_i$  ne dépend que de  $i$ . De plus, comme  $\delta_{t_j\sharp} P_i$  est supporté sur un paralléloétope à sommets dans  $\Gamma$ , le groupe  $\Gamma_i$  est de rang  $d - 1$  exactement, engendré par  $v_{1,i}, \dots, v_{d-1,i}$ . Le pseudo-hyperplan  $H_{ij}^X$  dans  $X$  est périodique selon  $\Gamma_i$ ; on définit les  $P_{ij}$  comme des domaines fondamentaux de  $\Gamma_i \curvearrowright H_{ij}^X$  donnés par le lemme 4.67. Soit  $\mathcal{F}$  l'espace affine des applications  $\Gamma$ -équivariantes de  $X$  dans  $\Gamma \otimes \mathbb{R}$ . On peut choisir  $f \in \mathcal{F}$  lipschitzienne (il en existe de toutes régularités); et si  $f_1, f_2$  sont deux telles applications, alors elles sont homotopes par un chemin d'applications  $\Gamma$ -équivariantes<sup>23</sup>. Introduisons alors  $v_{ij} : X \rightarrow \mathbb{R}$  tel que

$$v_{ij} = u_i \circ \delta_{t_j^{-1}} \circ f.$$

Les  $v_{ij}$  sont amenés à jouer dans  $X$  un rôle analogue à celui des  $u_{ij}$  dans  $X'$  : découper le courant qui interpole entre  $\partial D_j$  et  $P_{ij}$ .

Puisque les  $u_i$  admettent une même constante de Lipschitz, il existe une constante  $C$  indépendante de  $i$  et de  $j$  (ne dépendant que de  $f$ ) et telle que  $\text{Lip}(v_{ij}) \leq C/t_j$  pour tous  $i, j$ . Fixons  $\alpha > 0$  une constante et définissons  $R_{ij}$  comme

$$R_{ij} = \sum \left\{ \gamma P_{ij} : \gamma \in \Gamma_i, (v_{ij})_{\text{spt}(\gamma P_{ij})} \geq \frac{\alpha}{t_j} \right\}$$

Comparons les courants  $D_j$  et  $\tau'(D'_j)$ . D'après la proposition 4.63, il existe une constante  $C'$  telle que

$$\mathbf{M}(D_j - \tau'(D'_j)) \leq C' (\mathbf{M}(\tau(D_j) - D'_j) + \mathbf{M}(\partial D_j) + \mathbf{M}(\partial D'_j)).$$

Donc, d'après la condition (4.68) et la majoration (4.69), pour  $j$  assez grand,

$$\mathbf{M}(D_j - \tau'(D'_j)) \leq 2C' \varepsilon t_j^d + \mathcal{O}(t_j^{d-1}).$$

Appliquons le théorème de coaire pour les courants [Fed69] 4.3.2, pour  $D_j - \tau'(D'_j)$  avec les fonctions  $v_{ij}$ . Celui-ci donne pour tout  $j$  l'existence de réels  $s_{ij}$  dans l'intervalle

---

23. Il suffit pour cela de prendre des combinaisons convexes parcourant le segment  $[f_1, f_2]$ .

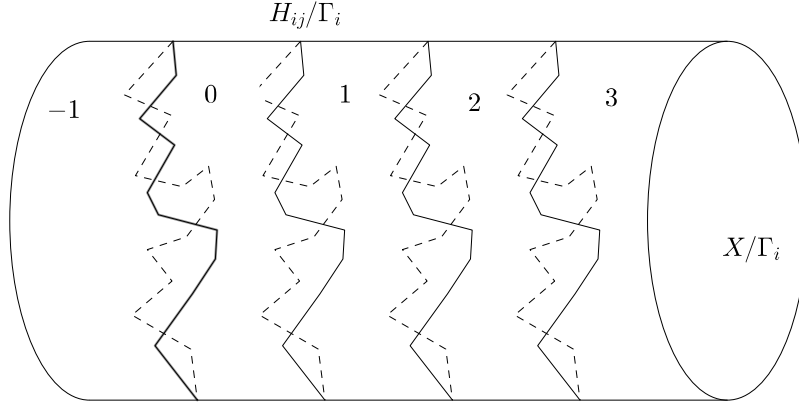


FIGURE 13 – Construction de  $\varphi'$ .

$(\frac{\alpha}{t_j}, \sqrt{2C\varepsilon})$  tels que

$$\sum_i \mathbf{M}(D_j - \tau'(D'_j), v_{ij}, s_{ij}+) \leq \sqrt{2C\varepsilon} t_j^{d-1}. \quad (4.70)$$

Définissons alors les courants

$$\begin{aligned} U_{ij} &:= \langle D_j - \tau'(D'_j), v_{ij}, s_{ij}+ \rangle \\ V_{ij} &:= R_{ij}[\{v_{ij} \leq s_{ij}\}] \\ W_{ij} &:= \{\partial D_j\}[\{v_{ij} \geq s_{ij}\}]. \end{aligned}$$

Puis  $S_{ij} = U_{ij} + V_{ij} + W_{ij}$ . Alors d'une part,  $S_{ij}$  et  $R_{ij}$  ont même bord ; d'autre part, la masse de  $U_{ij}$  est bornée grâce à (4.70), et celle de  $V_{ij}$  par la borne sur  $s_{ij}$ . Il reste deux objectifs :

1. Montrer que  $P_{ij}$  représente l'image de la classe d'homologie  $[\pi_{\#} P_i]$  dans  $H_{n-1}(X/\Gamma, \mathbb{R})$  via l'inclusion 4.12 vue comme  $H_{d-1}(\Gamma, \mathbb{R}) \hookrightarrow H_{n-1}(X/\Gamma, \mathbb{R})$  grâce aux dualités de Poincaré.
2. Introduire une masse limite  $\mathbf{M}_{\infty}$  pour les courants de  $X'$ , et savoir comparer  $t_j^{1-d} \mathbf{M}(\partial D_j)$  et  $\mathbf{M}_{\infty}(D')$  (au moins dans un premier temps, pour des  $t_j$  multiples de  $k$ ).

**Première étape :  $P_{ij}$  représente  $\pi_{\#}[P_i]$**  Le groupe  $\mathbb{Z} = \Gamma/\Gamma_i$  opère sur  $X/\Gamma_i$  proprement discontinûment ; en particulier il existe  $\gamma_0 \in \Gamma$  qui disjoint complètement le support de  $\partial\tau'(Q_{ij})$  de lui-même. Soit  $h \in \text{Hom}(\Gamma, \mathbb{R})$  tel que  $h|_{\Gamma_i} = 0$  et  $h(\gamma_0) = 1$ . Le groupe  $\Gamma' = \langle \Gamma_i, \gamma_0 \rangle$  est d'indice fini dans  $\Gamma$ . Soit  $S$  un système de représentants de  $\Gamma/\Gamma'$ . En relevant à  $X$  une fonction à valeurs entières construite sur  $X/\Gamma$  comptant les intersections avec les translatés de  $H_{ij}^X/\Gamma_i$  (cf. figure 13), on obtient  $\varphi' : X \rightarrow \mathbb{R}$  qui est  $\Gamma'$ -équivariante :

$\varphi'(\gamma'.x) = \varphi'(x) + h(\gamma')$ , pour tous  $x \in X$  et  $\gamma' \in \Gamma'$ . Quitte à poser

$$\varphi := \frac{1}{[\Gamma : \Gamma']} \sum_{\gamma \in S} \varphi \circ \gamma, \quad (4.71)$$

on obtient  $\varphi$  qui est  $\gamma$ -équivariante pour l'action  $\Gamma \curvearrowright \mathbb{R}$  définie par  $h$ . Ainsi, les classes d'homologie  $[P_{ij}] \in H_{n-1}(\Gamma \backslash X)$  et  $[P_i] \in H_{d-1}(\Gamma \backslash X')$  proviennent de la même classe, Poincaré-duale de  $h$  dans  $H_{d-1}(\Gamma)$  par l'inclusion (4.12).

*Remarque 4.72.* L'argument qui précède a successivement utilisé une définition par nombre d'intersection et la dualité de Poincaré. Il serait souhaitable, si c'est possible, de le simplifier.

**Deuxième étape : Estimation de  $t_j^{1-d} \mathbf{M}(\partial D_j)$**  Nous savons que  $[\pi_* R_{ij}] = N_{ij} [\pi_* P_{ij}]$ ; où  $N_{ij}$  est de l'ordre de  $t_j^{d-1}$ . En dehors de voisinages tubulaires d'ensembles de codimension  $\geq 2$ , en restrictions auxquels la masse est bornée par  $\text{const.} \cdot t_j^{d-2}$ ,  $\partial \tau'(D'_j)$  coïncide avec  $R_{ij}$ . D'autre part, par construction,  $S_{ij}$  est homologue à  $R_{ij}$ .

**Définition 4.73** (Masse limite). Soit  $\Phi : H_{d-1}(\Gamma) \rightarrow H_{n-1}(X/\Gamma)$  l'injection naturelle (4.12). Pour tout  $c \in H_{d-1}(\Gamma)$ , on définit

$$\|c\|_{\mathbb{R}, \infty} := \inf \{ \mathbf{M}(T) : T \in H_{n-1}(X/\Gamma), [T] = \Phi(c) \}.$$

Ceci définit une norme sur  $\Lambda_{d-1} X'$ , autrement dit une  $d-1$ -densité  $F$  sur  $\Gamma \otimes \mathbb{R}$ . On définit  $\mathbf{M}_\infty$  comme la masse sur les  $n-1$  courants associée à cette norme. La situation est résumée dans le diagramme suivant, où les flèches verticales désignent les dualités de Poincaré. Celle de droite est un isomorphisme isométrique d'après la proposition 3.32.

$$\begin{array}{ccc} ((\Lambda_{d-1}(\Gamma \otimes \mathbb{R}), F) & \xlongequal{\quad} & H_{d-1}(\Gamma, \mathbb{R}) \xrightarrow{\quad \Phi \quad} (H_{n-1}(X/\Gamma, \mathbb{R}), \|\cdot\|_{\mathbb{R}}) \\ & & \uparrow \text{D.P.} \qquad \qquad \qquad \uparrow \text{D.P.} \\ R_\Gamma^* = H^1(\Gamma, \mathbb{R}) & \xrightarrow{\quad} & (H^1(X/\Gamma, \mathbb{R}), |\cdot|_1) \end{array}$$

L'injection  $R_\Gamma^* \hookrightarrow H^1(X/\Gamma, \mathbb{R})$  est isométrique d'après définition 4.15 de la norme sur  $X' = R_\Gamma$ ; donc la dualité de Poincaré de gauche est aussi un isomorphisme isométrique. La proposition qui suit généralise 4.29.

**Proposition 4.74.** *Sous les hypothèses précédentes il existe une constante  $K > 0$  telle que*

$$\mathbf{M}_\infty(\partial D) \leq \liminf_j t_j^{d-1} \mathbf{M}(\partial D_j) + K\varepsilon \quad (4.75)$$

*Démonstration.* Pour tout  $i$ ,

$$\mathbf{M}(S_{ij}) \geq \|[S_{ij}]\|_{\mathbb{R}} = \|[R_{ij}]\|_{\mathbb{R}, \infty} = N_{ij} \mathbf{M}_\infty(P_i), \quad (4.76)$$

la dernière inégalité ayant lieu parce que  $P_i$ , en tant que sous-tore plongé dans un tore muni d'un intégrand homogène, minimise la masse dans sa classe d'homologie (lemme 3.38). D'autre



part,  $\mathbf{M}(\partial D_j - \sum_i S_{ij})$  est petit. Plus précisément

$$\begin{aligned} \sum_i S_{ij} &= \sum_i W_{ij} + U_{ij} + V_{ij} \\ &= \sum_i (\partial D_j) \lfloor \{v_{ij} \geq s_{ij}\} + \sum_i U_{ij} + \sum_i V_{ij}, \end{aligned}$$

D'après (4.70), le deuxième terme est borné par  $\sqrt{2C\bar{\varepsilon}t_j^{d-1}}$  tandis que  $\mathbf{M}(V_{ij}) \leq C'_i s_{ij} \mathbf{M}(P_{i,j})$  pour des constantes  $C'_i > 0$ , d'où

$$\sum_i S_{ij} = \partial D_j \lfloor \cup_i \{v_{ij} \geq s_{ij}\} + \mathcal{O}_{\mathbf{M}}(\sqrt{\bar{\varepsilon}t_j^{d-1}}). \quad (4.77)$$

En combinant cette estimation avec (4.76) et en utilisant que  $s_{ij}$  est petit, on obtient (4.75).  $\square$

## 5 Version discrète

Jusqu'à présent, le cadre d'étude a été une variété riemannienne (voire finslérienne) munie d'une action géométrique d'un groupe abélien de type fini. Cependant, comme signalé dans l'introduction, le problème isopérimétrique peut être formulé dans une classe plus large d'espaces, en particulier dans les graphes. Cette dernière partie est dévolue au problème isopérimétrique dans les graphes munis d'une action co-finie d'un groupe abélien de type fini, et d'une énergie de liaison (définition 5.3) invariante selon le groupe.

Dans [Pan99], Pansu déduit des résultats pour les solides covalents (définis en 5.5) à partir des théorèmes décrivant les tores riemanniens, en construisant des métriques adaptées. Sous réserve d'un théorème plus général, la méthode peut être rendue extrinsèque.

*Remarque 5.1.* Dédire les résultats pour les graphes des théorèmes pour la version riemannienne n'est pas entièrement satisfaisant. Un objectif souhaitable, qui dépasserait le présent mémoire, serait de définir une classe d'objets rassemblant variétés riemanniennes et graphes munis d'une action adéquate d'un groupe  $\Gamma$ , au sein de laquelle on puisse décrire des convergences respectant le problème isopérimétrique asymptotique et donner une preuve unifiée de la convergence des domaines extrémaux.

### 5.1 Le problème isopérimétrique des $\Gamma$ -graphes

#### 5.1.1 Energie de liaison et périmètre

On précise la définition du problème isopérimétrique dans les graphes. Pour nous, un graphe est un triplet  $G = (V, E, p)$  où  $V$  est un ensemble de sommets,  $E$  un ensemble d'arêtes orientées et  $p = (p_1, p_2) : E \rightarrow V \times V$  associe à chaque arête le couple formé par sa source et son but. On supposera de plus que  $p_1$  et  $p_2$  sont à fibres finies, autrement dit que  $G$  est localement fini. Enfin,  $E$  est muni d'une involution  $r$  (renversement de l'orientation) telle que, si  $p(e) = (u, v)$ , alors  $p(r(e)) = (v, u)$ . On dira que  $G$  est simple si  $p$  est injective, auquel cas on peut identifier  $E$  à un sous-ensemble de  $V \times V$ .

*Remarque 5.2.* La définition précédente autorise les arêtes multiples entre deux sommets. En effet de tels graphes peuvent apparaître parmi les quotients pour des actions de groupes, même à partir de graphes simples<sup>24</sup>.

**Définition 5.3** (Energie de liaison et périmètre). *Soit  $G = (V, E)$  un graphe, et  $e : E \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction positive (dite énergie de liaison)<sup>25</sup>. Pour  $B \subset V$ , on appelle bord de  $B$  l'ensemble*

$$\partial B := \{u \in E : p_1(u) \in B, p_2(u) \notin B\},$$

*et périmètre de  $B$  (selon  $e$ ) la quantité*

$$\mathcal{E}(\partial B) = \sum_{u \in \partial B} e(u).$$

24. On peut toutefois donner des conditions sur l'action de  $\Gamma$  pour se prémunir de la présence d'arêtes multiples, par exemple : pour tout  $\gamma \in \Gamma \setminus 1$ , pour tout  $v \in \tilde{V}$ ,  $d(\gamma.v, v) > 2$  où  $d$  est la distance de longueur sur  $\tilde{G}$  telle que toute arête a une longueur 1.

25. L'hypothèse de locale finitude permet notamment de s'assurer que pour tout  $v \in V$ ,  $e(v, -) \in \ell^1(\tilde{V})$ , ce qui donne un sens à la définition.

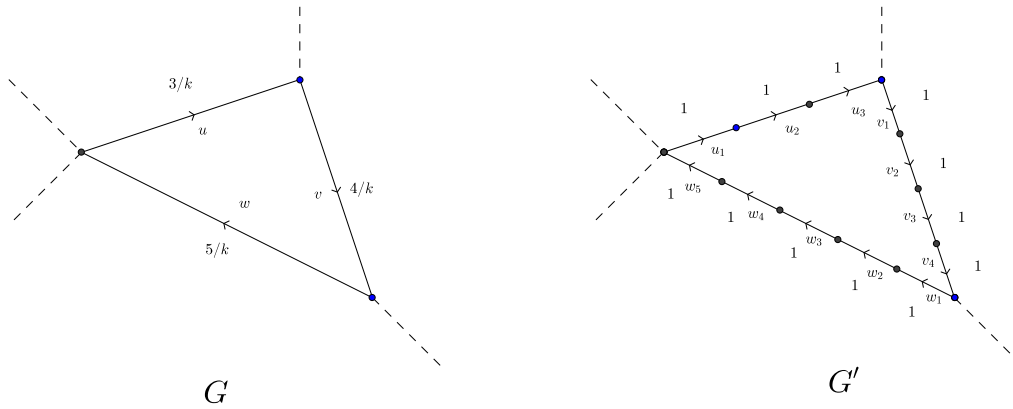


FIGURE 14 – Énergie de liaison dans le  $\Gamma$ -graphe  $G$  et dans le graphe modifié  $G'$ .  $k$  est un dénominateur commun des valeurs prises par l'énergie de liaison dans  $G$ .

Le problème isopérimétrique de  $(G, e)$  consiste à minimiser  $\mathcal{E}(\partial B)$  parmi les ensembles  $B$  finis de cardinal  $\tau \in \mathbb{N}$  fixé. Attention, le profil isopérimétrique n'est pas nécessairement croissant (penser au cas où le graphe  $G$  est cyclique).

**Définition 5.4.** Soit  $\Gamma$  un groupe de type fini. On appelle  $\Gamma$ -graphe un graphe  $G = (V, E, p)$ , muni d'une action libre et co-finie du groupe  $\Gamma$ .

Si  $e$  est une énergie de liaison  $\Gamma$ -invariante sur un  $\Gamma$ -graphe  $G$ , alors le problème isopérimétrique de  $(G, e)$  admet des minimiseurs exacts pour tout  $\tau \in \mathbb{N}$ . Dans la suite, toute énergie de liaison sur un  $\Gamma$ -graphe sera implicitement  $\Gamma$ -invariante.

*Exemple 5.5.* Une famille d'exemples de  $\Gamma$ -graphes importante est celle des solides covalents, dont l'isopérimétrie est étudiée par Pansu dans [Pan99] aux § 12, 13. Ceux-ci correspondent au cas où  $\Gamma \simeq \mathbb{Z}^n$ ,  $G$  est un graphe simple immergé<sup>26</sup> dans  $\mathbb{R}^n$  (en particulier pour  $n = 3$ ), et où les actions  $\Gamma \curvearrowright G$  et  $\mathbb{Z}^2 \curvearrowright \mathbb{R}^n$  sont entrelacées par l'immersion  $\iota : G \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ .

*Remarque 5.6.* Tant que  $\Gamma$  est un groupe moyennable, la notion d'énergie de liaison n'élargit pas considérablement l'ensemble des problèmes isopérimétriques considérés, même si l'on se restreint aux graphes simples. Pour s'en convaincre, supposons pour simplifier que  $e$  est à valeurs dans  $\mathbb{Q}$ . Alors on peut approcher le problème isopérimétrique dans  $(G, e)$  par un problème isopérimétrique dans  $(G', \mathbf{1}_{E'})$  où  $G' = (V', E')$  est un  $\Gamma$ -graphe obtenu en rajoutant des sommets sur les arêtes de  $G$  comme sur la figure 14. On peut alors montrer que les domaines extrémaux dans  $G'$  sont comparables<sup>27</sup> à ceux de  $G$ .

26. Pour  $n \geq 3$ , on peut aussi prendre plongé dans  $\mathbb{R}^n$ .

27. D'après le théorème 6.19 de [Gro07] et l'annexe A.3,  $G$  et  $G'$  sont de même dimension isopérimétrique, finie. En particulier leurs profils isopérimétrique sont sous-linéaires. En reprenant les notations de la figure 14, si  $D'$  est un domaine dans  $G'$  on le complète en lui rajoutant tous les sommets partiels entre deux sommets de  $D'$  qui sont dans  $V$ . Ceci augmente le volume d'au plus  $\text{const.} \cdot |\partial D'|$  tout en diminuant le bord.

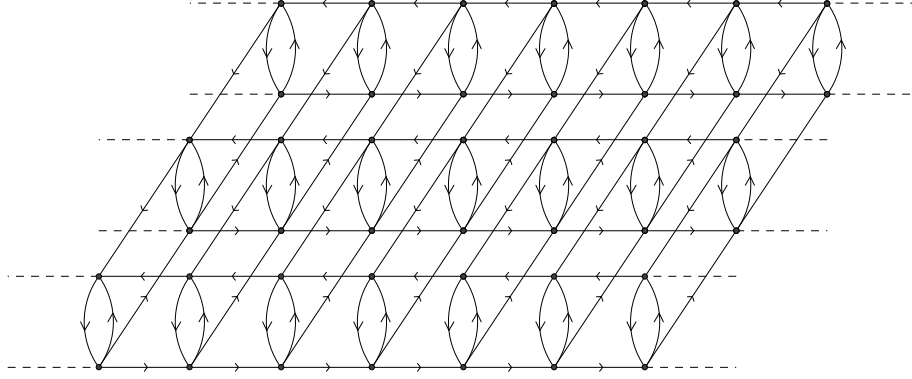


FIGURE 15 – Illustration de l'exemple 5.7 avec  $\Gamma = \mathbb{Z}^2$  et  $\Lambda = \mathbb{Z}^2 \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

### 5.1.2 Graphe quotient

Soit  $\Gamma$  un groupe de type fini et  $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E}, \tilde{p})$  un  $\Gamma$ -graphe, muni d'une énergie de liaison  $e$ . Le quotient  $G := \Gamma \backslash \tilde{G}$  est un graphe  $(V, E, p)$ . L'énergie de liaison de  $G$  est définie sur  $E$ . *Exemple 5.7* (cf. figure 15). Supposons que  $\Gamma$  est un sous-groupe d'indice fini dans un groupe  $\Lambda$ , et  $\tilde{G}$  un graphe de Cayley de  $\Lambda$  sur le système générateur symétrique  $S$ . Alors il y a une action  $\Gamma \curvearrowright \tilde{G}$  naturelle par translations. De plus, si  $\Gamma$  est distingué dans  $\Lambda$ ,  $G$  est le graphe de Cayley de  $\Lambda/\Gamma$  formé sur le système générateur  $\bar{S} = \{s \text{ mod. } \Gamma, s \in S\}$ .

### 5.1.3 Cohomologie

Soit  $G = (V, E, p)$  un graphe. Pour tout  $f \in \mathbb{R}^V$ , on définit  $df : E \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$df(u) := f(p_2(u)) - f(p_1(u)).$$

On définit les groupes de 1-cocycles et de 1-cobords de  $G$  par

$$\begin{aligned} Z^1(G, \mathbb{R}) &:= \{\alpha \in \mathbb{R}^E : \alpha \circ r = -\alpha\}, \\ B^1(G, \mathbb{R}) &:= \{\alpha \in \mathbb{R}^E : \exists f \in \mathbb{R}^V : \alpha = df\}. \end{aligned}$$

Puis, le premier groupe de cohomologie de  $G$  est  $H^1(G, \mathbb{R}) = Z^1(G, \mathbb{R})/B^1(G, \mathbb{R})$ . De manière analogue, on définit la cohomologie à support fini. Le lemme qui suit est l'analogue de 4.10, mais il est de démonstration bien plus directe.

**Lemme 5.8.** *Soit  $\tilde{G}$  un graphe orienté, muni d'une action libre, co-finie de  $\Gamma \simeq \mathbb{Z}^n$  de quotient  $\Gamma \backslash \tilde{G} = G$ . Alors pour tout  $h \in \text{Hom}(\Gamma, \mathbb{R})$  il existe  $f : \tilde{V} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\gamma.f = f + h(\gamma)$*

*Démonstration.* Soit  $V_0$  un domaine fondamental pour l'action de  $\Gamma$  sur  $\tilde{V}$ . On prend  $f$  quelconque sur  $V_0$ , puis  $f(\gamma.v_0) = f(v_0) + h(\gamma)$  pour tout  $\gamma \in \Gamma$  et  $v_0 \in V_0$ .  $\square$

On associe à  $h$  le cocycle  $\pi_* df$  sur  $G$ , ce qui décrit un morphisme injectif (à comparer avec (4.12))

$$H^1(\Gamma, \mathbb{R}) \hookrightarrow H^1(G, \mathbb{R}). \quad (5.9)$$

*Remarque 5.10.* Contrairement au cas des variétés, où il suffisait d'une hypothèse sur  $X$  ( $X$  contractile) pour que l'inclusion précédente soit une égalité, ici  $H^1(G, \mathbb{R})$  est typiquement beaucoup plus grand que  $H^1(\Gamma, \mathbb{R})$ .

Soit  $e : E \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction positive. On définit une semi-norme sur  $Z^1(G, \mathbb{R})$  en posant

$$\|\alpha\|_1 := \sum_{u \in E} e(u) |\alpha(u)|.$$

Puis on munit  $H^1(G, \mathbb{R})$  de la semi-norme quotient  $|\cdot|_1$ . Si  $e$  ne s'annule pas,  $|\cdot|_1$  est une norme, et  $H_1(G, \mathbb{R})$  est muni de la norme duale  $|\cdot|_1^*$ .

## 5.2 Profil isopérimétrique

### 5.2.1 Conjecture

**Conjecture 5.11.** Soit  $\tilde{G}$  un graphe muni d'une action de  $\Gamma \simeq \mathbb{Z}^n$  libre et co-finie de quotient  $G = (V, E, p)$ , et d'une énergie de liaison  $\Gamma$ -invariante  $e$ . On munit  $H_1(\Gamma, \mathbb{R})$  de la norme duale de la norme  $|\cdot|_1$  induite sur  $H^1(\Gamma, \mathbb{R})$  par l'inclusion (5.9), et de l'élément de volume tel que  $\Gamma$  forme un réseau de covolume  $|V|$ . Alors

$$I_{(G,e)}(N) \sim I_\infty(N), \quad (5.12)$$

où  $I_\infty$  est le profil isopérimétrique de  $H_1(\Gamma, \mathbb{R})$ .

### 5.2.2 Majoration du profil isopérimétrique des $\mathbb{Z}^n$ -graphes

Nous allons procéder comme en 4.3 pour démontrer l'inégalité

$$\limsup I/I_\infty \leq 1.$$

dans la conjecture 5.11. Ici la boule unité de  $R_\Gamma$  est vraiment polyédrale. Soit donc  $\beta_j$  une famille finie de  $\text{Hom}(\Gamma, \mathbb{R})$  telle que

$$|\gamma|_1^* = \sup_j \beta_j(\gamma).$$

Pour tout  $j$ , soit  $\alpha_j$  un 1-cocycle de  $G$  qui réalise le minimum de la norme  $\ell_1$  dans la classe de  $\beta_j$  (identifiée à une classe de cohomologie de  $G$  grâce à l'inclusion 5.9). On fixe  $v_0 \in \tilde{V}$ , et l'on définit  $f_j$  sur  $\tilde{V}$  comme la primitive de  $\alpha_j$  s'annulant en  $v_0$ . Enfin,  $\rho := \sup_j f_j$ . Pour tout  $t > 0$ , soit  $\chi_t$  la fonction définie en (4.23), puis  $u_t = \chi_t \circ |\cdot|_1^*$  sur  $R_\Gamma$  et  $\tilde{u}_t = \chi_t \circ \rho$  sur  $\tilde{V}$ . Alors, quand  $t \rightarrow +\infty$  on obtient d'une part

$$\int_{B_t} \omega_\infty \sim \left| \left\{ w \in \tilde{V} : \rho(w) < t \right\} \right|,$$

et d'autre part (à comparer avec le lemme 4.24)

$$\sum_{a \in \tilde{E}} |d\tilde{u}_t(a)e(a)| \sim \int_{\mathbb{R}_\Gamma} |du_t|.$$

Afin de construire un domaine à partir de la donnée de  $\tilde{u}_t$  comme en 4.3, nous pouvons utiliser la formule de la coaire pour les graphes. Ceci s'effectue au moyen du lemme suivant :

**Lemme 5.13.** *Soit  $G = (V, E)$  un graphe localement fini muni d'une énergie  $e$ . Soit  $f : V \rightarrow \mathbb{R}_+$  à support fini. Alors il existe  $B \subset V$  finie telle que*

$$\mathcal{E}(\partial B) \leq \frac{\|df\|_1}{\|f\|_\infty}. \quad (5.14)$$

*Démonstration.* Quitte à modifier très légèrement  $f$ , on suppose que les valeurs non nulles qu'elle prend sont distinctes. On étend  $f$  aux arêtes du graphe identifiées au segment  $[0, 1]$ , de manière affine. De même, l'énergie  $e$  est vue comme une fonction constante par morceaux sur les arêtes. La formule de la coaire B.4 pour  $f$  donne alors

$$\int_G |df|e = \int_0^{+\infty} \left( \int_{f^{-1}(t)} e d\mathcal{H}^0 \right) dt = \int_0^{+\infty} \sum_{a \in E: t \in [f(a^+), f(a^-)]} e(a) dt,$$

où  $a^-$  et  $a^+$  désignent les extrémités de l'arête  $a$ . Observons que si  $B_t$  est l'ensemble de niveau  $\{f > t\}$  alors la dernière intégrale majore  $\int_{\mathbb{R}_+} \mathcal{E}(\partial B_t) dt$ , par conséquent

$$\int_0^{\sup f} \mathcal{E}(\partial B_t) dt \leq \int_G |df|e = \|df\|_1.$$

En particulier, il existe  $t_0$  et  $B = B_{t_0}$  pour lesquels (5.14) est valable.  $\square$

### 5.3 Du problème riemannien au problème discret

On décrit ici des conséquences des conjectures faible 4.17 et forte 4.18 pour le problème discret.

Soit  $\tilde{G} = (V, E)$  un graphe infini localement fini muni d'une action co-finie de  $\Gamma$  abélien libre de type fini, ainsi que d'une énergie de liaison  $\Gamma$ -invariante  $e : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ . Nous allons associer au couple  $(\tilde{G}, e)$  une variété riemannienne  $\Sigma_{\tilde{G}}$  de dimension 2 dont le problème isopérimétrique est comparable à celui de  $(G, e)$ . La démarche est comparable à [Pan99], § 12 et § 13, mais elle est cette-fois ci intrinsèque. Pour simplifier la construction, on supposera que  $e$  est symétrique, autrement dit que  $\tilde{G}$  n'est pas orienté. Une construction plus sophistiquée devrait permettre de traiter le cas asymétrique.

Soit  $d^+$  le degré maximal d'un sommet dans  $G$ , et  $e^+ = \max_E e$ . On se donne  $r$  sous la condition

$$4\pi r^2 \geq 10 \cdot d^+ e^+. \quad (5.15)$$

Soit  $\Sigma_V$  une réunion dénombrable de sphères euclidiennes de rayon  $r$ , indicée par  $V$ . On construit  $\Sigma_{\tilde{G}}$  à partir de  $\Sigma_V$  en connectant les sphères au comme suit : Soient  $S_u$  et  $S_v$  deux

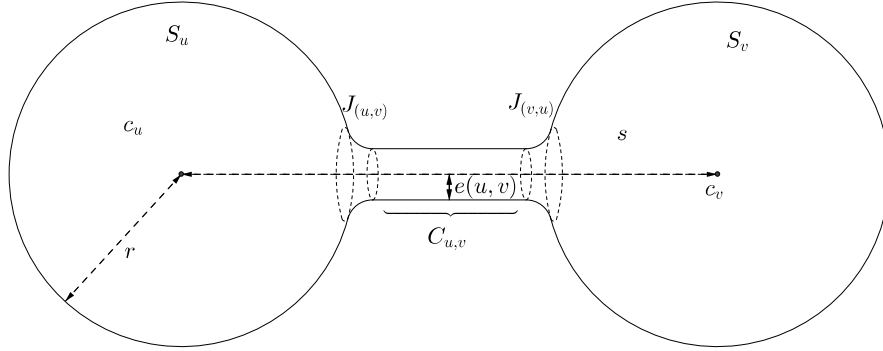


FIGURE 16 – Détail de la construction de  $\Sigma_{\tilde{G}}$  : jonction entre  $S_u$  et  $S_v$ .

sphères de  $\Sigma_V$  telles que  $e(u, v) > 0$ . Au moyen d'un plongement dans  $\mathbb{E}^3$ ,  $S_u$  et  $S_v$  s'identifient à deux sphères dont les centres  $c_u$  et  $c_v$  sont à distance  $s > 2r$  l'un de l'autre. Soit  $[0, s] \rightarrow \mathbb{E}^3$  le segment géodésique reliant  $c_u$  à  $c_v$ , et  $C_{u,v}$  le cylindre à base circulaire de rayon  $e(u, v)$  dirigé par  $s[r, s - r]$ .  $C$  peut être connecté de manière lisse (via  $J_{(u,v)}$  et  $J_{(v,u)}$ ) à  $S_u$  et  $S_v$  privées de petites calottes sphérique de rayon très légèrement supérieur à  $e(u, v)$ , cf. la figure 16. On note encore  $S_u$  et  $S_v$  les parties de sphères restantes.

La condition (5.15) est là pour s'assurer qu'il y a suffisamment de place sur les sphères  $S_u$  pour mener à bien le procédé pour toutes les arêtes de  $\tilde{G}$ .  $\Sigma_{\tilde{G}} = \Sigma_{\tilde{G}}(r, s)$  est la 2-variété riemannienne obtenue; elle est naturellement munie d'une action co-compacte de  $\Gamma$ .

*Remarque 5.16.* Si  $r \rightarrow +\infty$  alors  $r^{-2}\Sigma_{\tilde{G}}(r, r^2) \rightarrow \tilde{G}$  au sens de Gromov-Hausdorff, où  $\tilde{G}$  est muni de la structure métrique pour laquelle les sommets sont ponctuels et chaque arête est de longueur 1.

**Lemme 5.17.** *Soit  $B \subset V$  un ensemble fini de sommets. Pour tous  $r, s > 0$  tels que  $s > 2r$ , on définit  $B'(r, s) \subset \Sigma_{\tilde{G}}(r, s)$  comme le plus petit domaine connexe de  $\Sigma_{\tilde{G}}(r, s)$  qui contient  $S_u$  pour tout  $u \in B$  et tel que  $\{u, v\} \subset B \implies C_{u,v} \cup J_{(u,v)} \cup J_{(v,u)} \subset B'(r, s)$ . Soit  $\mu > 3$  une constante, et  $B \subset V$  un ensemble fini. Quand  $r \rightarrow +\infty$ ,*

$$\frac{\text{Vol}B'(r, \mu r)}{r^2} \rightarrow 4\pi|B| \quad (5.18)$$

tandis que

$$\text{Vol}\partial B'(r, \mu r) \rightarrow 2\pi\mathcal{E}(\partial B). \quad (5.19)$$

*Démonstration.* Pour toute constante  $\lambda > 0$ , il y a convergence au sens de Gromov-Hausdorff mesuré [Gro07, 3 1/2 B]

$$\frac{1}{r}\Sigma_{\tilde{G}}(r, \mu r) \xrightarrow{\square_\lambda} \left( \tilde{G}, 4\pi \sum_{v \in V} \delta_v \right),$$

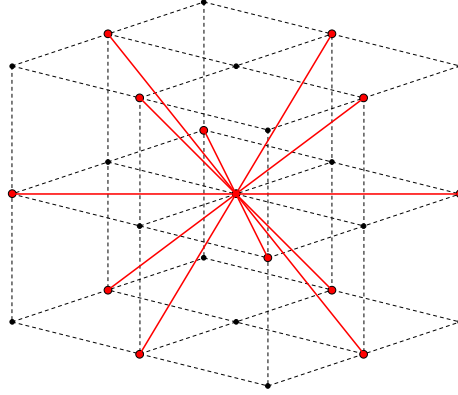


FIGURE 17 – Un solide covalent de valence 12. Les sommets sont les centres des sphères d’un empilement compact (cubique à faces centrées).

où  $\delta_v$  est la mesure de Dirac sur  $v$ . En particulier  $\frac{1}{r}B'(r, \mu r) \rightarrow (B, 4\pi\nu)$  où  $\nu$  est la mesure de comptage sur  $B$ , ce qui prouve (5.18). Ensuite, soit  $\eta > 0$  tel que le rapport de volume des composantes de bord des  $J_{(u,v)}$  soit égal à  $1 + \eta$ . Par construction,  $\eta \rightarrow 0$  quand  $r \rightarrow +\infty$ ; or

$$\text{Vol}(\partial B'(r, s)) = 2\pi(1 + \eta)\mathcal{E}(\partial B),$$

ce qui prouve (5.19). □

Il est possible de déduire du lemme 5.17 une comparaison des profils isopérimétrique de  $\tilde{G}$  et de son approximation riemannienne, et en particulier une minoration du profil isopérimétrique de  $\tilde{G}$  si celui de  $\Sigma_{\tilde{G}}(r, s)$  est connu, ce qui relève de la sous-section 4.8.

## 5.4 Solides covalents et cristallographie

### 5.4.1 Norme cristalline et cristaux dans un milieu périodique

Pansu a démontré la convergence des domaines extrémaux dans le cas particulier des solides covalents (définis dans l’exemple 5.5). Quand  $\Gamma$  est égal à  $\mathbb{Z}^3$  ou un groupe de Bravais, les solides covalents symétriques peuvent être utilisés pour modéliser un ensemble d’atomes disposés périodiquement dans l’espace  $\mathbb{R}^3$ , et en interaction bornée<sup>28</sup> les uns avec les autres. Si  $\Gamma' < \Gamma$  est le réseau de translations de  $\Gamma$ , la norme  $|\cdot|_1^*$  sur  $H_1(\Gamma', \mathbb{R})$  est appelée norme cristalline, parce que sa boule unité doit décrire la forme d’équilibre adoptée par un cristal constitué d’un grand nombre d’atome dans ce milieu.

<sup>28</sup>. la symétrie du solide covalent correspond à celle de l’interaction physique, tandis que le caractère borné est assuré par l’hypothèse de locale finitude.



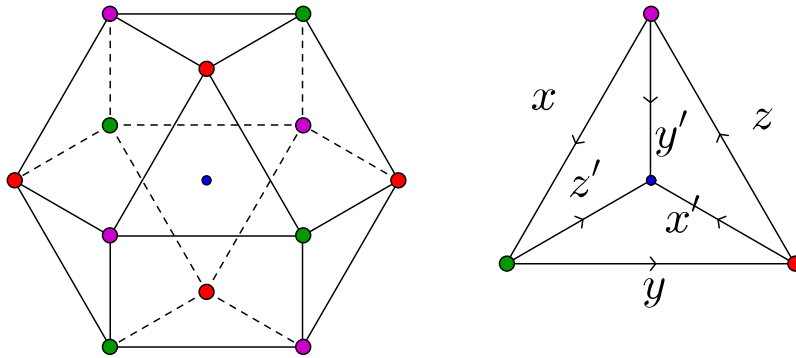


FIGURE 18 – Le graphe  $G/\Gamma$ .

### 5.4.2 Un exemple

On prend pour  $G$  le solide covalent symétrique formé comme le nerf d'un empilement sphérique de densité maximale dans  $\mathbb{E}^3$  (figure 17). Les sommets adjacents de  $v \in V$  forment un cuboctaèdre; ils sont identifiés par paquets de 4 dans le quotient  $G/\Gamma$ , qui est le graphe complet  $K_4$  formé par le 1-squelette d'un tétraèdre (voir la figure 18). La norme  $|\cdot|_1$  sur le groupe  $H^1(G/\Gamma)$  est définie par un problème de minimisation sous contraintes linéaires :

$$\begin{aligned}
 |(X, Y, Z)|_1 &= \inf \{ |x| + |x'| + |y| + |y'| + |z| + |z'| : \\
 &\quad X = x + z' - y', \quad Y = y + x' - z', \quad Z = z + y' - x' \} \\
 &= \inf \{ |X| + |Y| + |Z|, \sup \{ 2|X|, 2|Y|, 2|Z| \} \} .
 \end{aligned}$$

La boule unité est un cuboctaèdre. Celle de la norme cristalline est l'ensemble polaire, le dodécaèdre rhombique de la figure 4 que nous reproduisons ci-après.

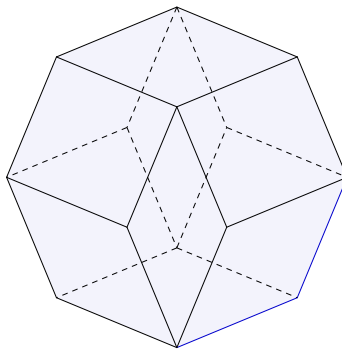


FIGURE 19 – Le cristal du solide covalent de la figure 17.

## A Généralités sur l'inégalité isopérimétrique

Cette annexe justifie des assertions données sans preuve dans l'introduction et dans 1.2.1.

### A.1 Espace euclidien

Le théorème suivant, dont nous donnerons une preuve élémentaire (attribuée à Hurwitz), constitue une forme de l'inégalité isopérimétrique dans le plan euclidien :

**Théorème A.1.** Soit  $\gamma : S^1 \rightarrow \mathbb{E}^2$  une courbe de Jordan  $C^1$  par morceaux. On note  $\ell$  la longueur parcourue et  $S$  l'aire enfermée par  $\gamma$ . Alors  $\ell$  et  $S$  sont liées par l'inégalité isopérimétrique

$$\ell^2 \geq 4\pi S, \quad (\text{A.2})$$

avec égalité ssi  $\gamma$  paramétrise un cercle euclidien.

*Démonstration.* Quitte à effectuer un reparamétrage, on peut supposer que  $|\gamma'| \equiv 1$  et ainsi que  $\ell = 2\pi$ ; l'inégalité générale (A.2) se déduit par homothétie à partir de ce cas. Pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , soit

$$c_n := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \gamma(t) e^{-int} dt,$$

$$c'_n := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \gamma'(t) e^{-int} dt.$$

Alors  $c'_n = inc_n$ , et

$$2\pi = \ell = \int_0^{2\pi} |\gamma'| = \int_0^{2\pi} |\gamma'|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c'_n|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} n^2 |c_n|^2.$$

D'autre part, d'après la formule de Stokes appliqué à la mesure d'aire  $\sigma = dx \wedge dy = \frac{1}{2} d(xdy - ydx)$  sur le domaine  $\Omega$  fermé par  $\gamma$ ,

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [\gamma_x(s)\gamma'_y(s) - \gamma'_x(s)\gamma_y(s)] ds = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \Im(\gamma'(t)\overline{\gamma(t)}) dt \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \Im(inc_n \overline{c_n}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} n |c_n|^2. \end{aligned}$$

Finalement

$$\begin{aligned} \ell^2 - 4\pi S &= 4\pi^2 - 4\pi S = 2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} n^2 |c_n|^2 - 2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} n |c_n|^2 \\ &= 2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} n(n-1) |c_n|^2 \geq 0, \end{aligned}$$

avec égalité si  $c_n = 0$  quand  $n$  est différent de 0 ou 1.  $\square$

Pour le cas général, on utilise le théorème de Brenier que nous admettrons. La preuve qui en découle est à comparer avec celle de l'inégalité (1.52) de Brunn en section 1.

**Théorème A.3** (Brenier). *Soit  $d$  un entier naturel,  $\mathcal{L}^d$  la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{E}^d$ . Soient  $\mu$  et  $\nu$  des mesures de probabilité sur  $\mathbb{E}^d$ . Si  $\mu \ll \mathcal{L}^d$ , alors il existe un potentiel  $\psi : \mathbb{E}^d \rightarrow \mathbb{R}$  tel que*

$$(\nabla\psi)_*\mu = \nu. \quad (\text{A.4})$$

De plus,  $\nabla\psi$  est uniquement déterminé  $\mu$ -presque partout.

**Corollaire A.5.** *Soit  $\Omega \subset \mathbb{E}^d$  un domaine à bord  $C^1$ . Alors*

$$\text{Vol}_{d-1}(\partial\Omega) \geq n \text{Vol}_d(\Omega)^{\frac{d-1}{d}}.$$

Avec égalité ssi  $\Omega$  est une boule euclidienne.

*Démonstration.* Soient  $\mu$  et  $\nu$  les mesures de Lebesgue restreintes à  $\Omega$  et  $B$ , normalisées, et  $\psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  le potentiel de transport de Brenier associé  $z : \Omega \rightarrow B$ . Alors  $\nabla z$  est symétrique (c'est l'endomorphisme correspondant par la structure euclidienne à la hessienne de  $\psi$ ), et  $\mathcal{J}(x) = \det(\nabla z) = \prod_i \lambda_i$  où les  $\lambda_i$  sont les valeurs propres de  $\text{Hess}(\psi)$ . D'après le théorème de Brenier  $\nu = z_*\mu$ , donc :  $1 = \int_\Omega \mathcal{J}(x) dx$ . D'après l'inégalité arithmético-géométrique (IAG) et l'inégalité de Hölder (H),

$$\begin{aligned} \int_\Omega \mathcal{J}(x) d\mu(x) &\stackrel{\text{(IAG)}}{\leq} \int_\Omega \left( \sum_i \frac{\lambda_i}{n} \right)^n d\mu(x) \stackrel{\text{(H)}}{\leq} \left( \int \sum_i \frac{\lambda_i}{n} d\mu(x) \right)^n \\ &= \left( \frac{1}{n} \int_\Omega \text{div}(z) d\mu(x) \right)^n, \end{aligned}$$

avec égalité si et seulement si les  $\lambda_i$  sont égaux (IAG) et constants (Hölder), ce qui se produit quand et seulement quand  $\nabla z$  est une homothétie de facteur constant, i.e.  $\Omega$  est une boule euclidienne. Finalement d'après le théorème de Stokes,

$$\int_\Omega \text{div}(z) d\mu(x) = \frac{1}{\text{Vol}(\Omega)} \int_\Omega \text{div}(z) d\mathcal{L}^d(x) = \frac{1}{\text{Vol}(\Omega)} \int_{\partial\Omega} \langle z, \nu \rangle \leq \frac{\text{vol}(\partial\Omega)}{\text{vol}(\Omega)}.$$

$\square$

## A.2 Espace hyperbolique

La référence pour ce qui suit est [Gro07], ch. 6B.

On se place dans  $\mathbb{H}^n$ , et on fixe un point  $\omega$  dans le bord à l'infini de  $\mathbb{H}^n$ . Pour tout  $A \subset \mathbb{H}^n$  un ensemble, on désigne par  $C(A)$  la réunion des rayons géodésiques de source sur  $A$  et dirigés vers  $\omega$ .

**Lemme A.6.** *Supposons que  $A$  est un domaine compact à bord  $C^1$ . Alors*

$$\text{Vol}(C(A)) \leq \frac{\text{Vol}(\partial A)}{n-1}. \quad (\text{A.7})$$

*Démonstration.* Utilisons un modèle du demi-espace pour  $\mathbb{H}^n$  où  $\omega$  est à l'infini ; alors  $\partial\mathbb{H}^n$  est identifié à  $\{\omega\} \sqcup (\mathbb{R}^{n-1} \times 0)$ , et

$$C(A) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{H}^n : x_n \geq \inf\{y > 0, (x_1, \dots, x_{n-1}, y) \in A\}\}.$$

Posons  $\partial_0 A$  comme l'ensemble des  $x \in \partial C(A)$  tel que  $T_x \partial C(A)$  n'est pas vertical ; alors  $\partial_0 A \subset \partial A$ , et c'est le graphe d'une fonction  $f : \mathbb{R}^{n-1} \supset D \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ , de classe  $C^1$ , où  $D$  est un ouvert relativement compact. Maintenant, d'une part

$$\text{vol}(C(A)) = \int_D \int_{f(x)}^{+\infty} \frac{dt}{t^n} = \frac{1}{n-1} \int_D f(x_1, \dots, x_{n-1})^{1-n} dx_1 \dots dx_{n-1},$$

et d'autre part

$$\text{vol}(\partial A) \geq \text{vol}(\partial_0 A) = \int_D \sqrt{1 + \|\nabla f\|^2} f(x_1, \dots, x_{n-1})^{1-n} dx_1 \dots dx_{n-1},$$

ce qui donne l'inégalité voulue.  $\square$

**Proposition A.8** (Inégalité (1.40)). *Pour tout domaine  $A$  compact, non vide, à bord  $C^1$  dans  $\mathbb{H}^n$ ,*

$$\text{vol}(A) < \frac{\text{vol}(\partial A)}{n-1}.$$

*Démonstration.* C'est une conséquence du lemme précédent, de l'inclusion  $A \subsetneq C(A)$  pour  $\omega \in \partial\mathbb{H}^n$  et de la compacité de  $A$ .  $\square$

Il n'y a pas égalité dans l'inégalité précédente. Toutefois, si l'on remplace  $\mathbb{H}^n$  par  $\Gamma \backslash \mathbb{H}^n$  où  $\Gamma$  est un groupe d'isométries discret fixant  $\omega$  et tel que l'action induite  $\Gamma \curvearrowright \partial\mathbb{H}^n \setminus \{\omega\}$  soit co-compacte, alors la preuve du lemme fournit l'unique cas d'égalité. Celui-ci a été illustré sur la figure 1 de l'introduction.

### A.3 Groupes nilpotents

Soit  $\Gamma$  un groupe nilpotent de type fini. Si  $(\Gamma^i)_{i \geq 0}$  désigne sa suite centrale descendante, la croissance de  $\Gamma$  est polynômiale de degré  $n = \sum_i \text{irg}[\Gamma^i / \Gamma^{i+1}] / \text{tors.}$ , d'après un théorème dû à Bass précisé par Pansu [Pan83] : si  $C_\Gamma$  est un graphe de Cayley de  $\Gamma$  muni d'une métrique invariante à gauche, il existe  $c > 0$  telle que  $\text{vol}(B(r)) \sim cr^n$  dans  $C_\Gamma$ . On dit que  $n$  est la dimension homogène de  $\Gamma$ .

**Proposition A.9.** *Sous les hypothèses précédentes,  $C_\Gamma$  admet une inégalité isopérimétrique du type  $\text{vol}(\partial A) \leq c' \text{vol}(A)^{\frac{n-1}{n}}$ , pour toute partie finie  $A$  de l'ensemble de ses sommets.*

En particulier, la dimension isopérimétrique<sup>29</sup> de  $\Gamma$  est égale à sa dimension homogène.

---

29. cf. définition 1.35 ; cette dimension ne dépend pas du graphe de Cayley choisi.

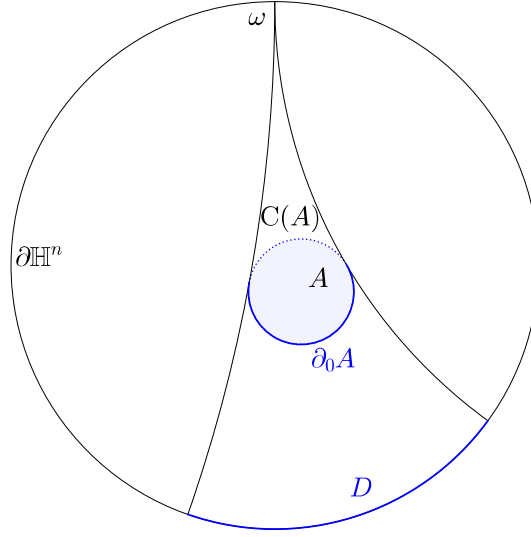


FIGURE 20 – Preuve de l’inégalité isopérimétrique dans  $\mathbb{H}^n$

*Remarque A.10.* Conformément au théorème ([Gro07] 6.19) de Gromov, la conclusion vaut également pour les variétés riemanniennes  $M$  munies d’une action géométrique de  $\Gamma$ , et, en particulier, pour la complétion de Malcev  $G$  de  $\Gamma$  si celui-ci est sans torsion. L’entier  $n$  correspond aussi à la dimension de Hausdorff du cône asymptotique de  $M$  ou de  $\Gamma$  (qui est un groupe de Lie gradué  $G_\infty$  simplement connexe, dépendant seulement<sup>30</sup> de  $G$ , muni d’une métrique sous-finslérienne de Carnot-Carathéodory).

*Démonstration.* L’argument essentiel (lemme A.12) dans la preuve qui suit est dû à Coulhon et Saloff-Coste [CSC93]. Soit  $m$  la dimension isopérimétrique de  $\Gamma$ . D’après le théorème de Bass, quitte à considérer une sous-suite de boules métriques de rayon croissant tendant vers  $+\infty$ ,  $m \leq n$ . Réciproquement, soit  $S$  un système générateur de  $\Gamma$  de cardinal  $s$ , et  $A$  un ensemble fini de  $\Gamma$ . Soit  $C_\Gamma$  le graphe de Cayley de  $\Gamma$  formé sur  $S$ , muni de la métrique de mots. Soit  $r$  l’entier minimal tel que  $|B(r)| \geq 2|A|$ , et  $\varphi : \Gamma \rightarrow [0, 1]$  définie par  $\varphi(\gamma_0) := \frac{1}{|B(r)|} \sum_{\gamma \in B(r)} \mathbf{1}_A(\gamma_0 \gamma^{-1})$ . Alors, puisque  $|B(r)| \geq 2|A|$ ,  $\varphi$  est encadrée par 0 et 1/2 sur  $\Gamma$ , donc

$$\sum_{\alpha \in A} (1 - \varphi(\alpha)) \geq \frac{|A|}{2}. \quad (\text{A.11})$$

Mais le premier membre de cette inégalité exprime aussi le nombre de couples  $(\alpha, \gamma) \in A \times B(r)$  tels que  $\alpha\gamma \notin A$ , divisé par  $|B(r)|$ , autrement dit, le nombre moyen d’éléments transportés en-dehors de  $A$  quand on les multiplie à droite par  $\gamma \in B(r)$ . Ce nombre est toujours majoré par  $r|\partial A|$ , comme l’exprime le lemme suivant.

30. Consulter [Pan83, § 40] pour la construction de  $G_\infty$  à partir de  $G$ .

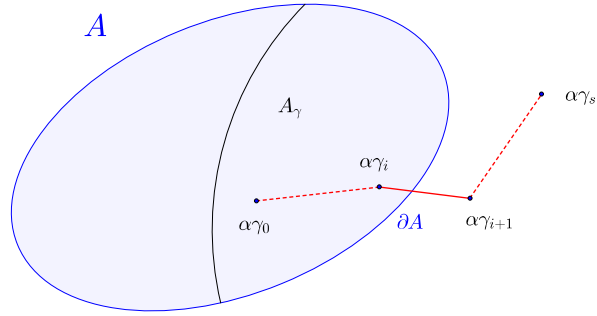


FIGURE 21 – Preuve du lemme A.12.

**Lemme A.12.** Pour tout  $\gamma \in B(r)$ , soit  $A_\gamma = \{\alpha \in A : \alpha\gamma \notin A\}$  et  $N(\gamma) = |A_\gamma|$ . Alors

$$N(\gamma) \leq r|\partial A|. \quad (\text{A.13})$$

*Démonstration du lemme A.12.* Soit  $s$  la longueur de mot de  $\gamma$  dans  $C_\Gamma$ , et  $\{\gamma_0, \dots, \gamma_s\} \subset \Gamma$  tel que  $\gamma_0$  est le neutre de  $\Gamma$ ,  $\gamma_r = \gamma$  et  $\gamma_i^{-1}\gamma_{i+1} \in S$ . Pour tout  $\alpha \in A_\gamma$ , on définit le temps de dernière sortie de  $\alpha$  comme  $t(\alpha) = \sup\{i : \alpha\gamma_i \in A\}$  (voir figure 21). Alors

$$\begin{aligned} N(\gamma) &= \sum_{i=0}^{s-1} |\{\alpha \in A : t(\alpha) = i\}| \leq \sum_{i=0}^{s-1} |\{\alpha \in A : \alpha\gamma_i \in A, \alpha\gamma_{i+1} \notin A\}| \\ &= \sum_{i=0}^{s-1} |\{\alpha \in A : (\alpha\gamma_i, \alpha\gamma_{i+1}) \in \partial A\}| \leq s|\partial A|. \end{aligned}$$

Or,  $\gamma \in B(r)$  donc  $s \leq r$ , la dernière inégalité donne donc (A.13).  $\square$

Finalement, (A.11) et la borne (A.13) sur la moyenne des  $N(\gamma)$  donnée par le lemme impliquent

$$r|\partial A| \geq \frac{|A|}{2}. \quad (\text{A.14})$$

Etant donnée la croissance de  $\Gamma$ ,  $r$  peut être choisi de l'ordre de  $|A|^{1/n}$ , ce qui permet de conclure.  $\square$

## B Une formule de coaire anisotrope pour les ensembles rectifiables

D'après un théorème de Rademacher, si  $f$  est une application lipschitzienne définie sur  $\mathbb{R}^{m+n}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ , son jacobien  $\mathcal{J}_n f$  est encore défini  $\mathcal{L}^{m+n}$ -presque partout; c'est une fonction mesurable positive. La formule de la coaire ([Fed69], 3.2.) s'énonce alors :

**Théorème B.1** ([Fed69], 3.2.11). *Soit  $n$  un entier naturel,  $m > 1$ ,  $f : \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction lipschitzienne, et  $A$  un borélien de  $\mathbb{R}^{n+m}$ . Alors :*

$$\int_A \mathcal{J}_n f(x) d\mathcal{L}^{m+n}x = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{H}^m(A \cap f^{-1}\{y\}) d\mathcal{L}^n y. \quad (\text{B.2})$$

Une version équivalente de cette formule est la suivante.

**Théorème B.3.** *Sous les mêmes hypothèses que le théorème précédent, et avec  $g : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction intégrable (ou mesurable positive si  $n = 1$ ),*

$$\int_A g(x) \mathcal{J}_n f(x) d\mathcal{L}^{m+n}x = \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{A \cap f^{-1}(y)} g(x) d\mathcal{H}^m(x) \right) d\mathcal{L}^n y. \quad (\text{B.4})$$

Dans [CdL16], D. Cibotaru et J. de Lira démontrent une adaptation de la formule (B.4) pour des normes asymétriques non nécessairement isotropes sur  $\mathbb{R}^{n+m}$  et  $\mathbb{R}^m$ . Le formalisme introduit au préalable (densité, co-densité, jacobien, co-jacobien) que nous rappelons ici permet de faire reposer leur preuve directement sur la formule (B.4).

**Définition B.5** (Jacobien). *Soient  $V$  et  $W$  deux espaces vectoriels,  $V$  de dimension  $n$  et  $\psi : V \rightarrow W$  linéaire. Soient  $F$  et  $G$  deux  $n$ -densités symétriques sur  $V$  et  $W$  respectivement. Alors le jacobien de  $\psi$  par rapport à  $F$  et  $G$  est*

$$\mathcal{J}(\psi; F, G) = \sup\{G(\Lambda_n \psi(\xi)) : F(\xi) \leq 1\}.$$

Le jacobien vérifie la propriété de multiplicativité

$$\mathcal{J}(\psi \circ \varphi; F, H) = \mathcal{J}(\psi; G, H) \mathcal{J}(\varphi; F, G),$$

pour  $\varphi : V \rightarrow U$  et  $\psi : U \rightarrow W$ ,  $F, G$  et  $H$  des  $n$ -densités sur  $V, U$  et  $W$  respectivement.

**Définition B.6** (Co-jacobien). *Soient  $V$  et  $W$  de dimensions respectives  $n + m$  et  $m$ ,  $F$  une  $n$ -densité symétrique et  $\mu$  une  $n + m$ -densité symétrique sur  $V$ ,  $\nu$  une  $m$ -densité symétrique sur  $W$ . Le co-jacobien de  $\psi : V \rightarrow W$  linéaire par rapport à  $F, \nu$  et  $\mu$  est par définition :*

$$\mathcal{J}^*(\psi; \nu^*, F_\mu^*) = \sup\{F_\mu^*(\Lambda^n \psi(\omega)) : \nu^*(\omega) \leq 1\}.$$

Autrement dit, c'est le jacobien de  $\psi^*$  pour  $\nu^*$  et  $F_\mu^*$ .

Quand  $V$  et  $W$  ont même dimension  $n$ , on définit encore le co-jacobien comme précédemment en remplaçant  $F_\mu^*$  par  $\mu^*$ ; alors le jacobien  $\mathcal{J}(\psi; \mu, \nu)$  et le co-jacobien  $\mathcal{J}^*(\psi; \nu^*, \mu^*)$  coïncident. Nous utiliserons ce fait dans la preuve du théorème B.8.

*Exemple B.7.* Quand  $V$  et  $W$  sont euclidiens, ils possèdent des densités naturelles dans toutes les dimensions. Pour ces densités, le jacobien d'exprime  $\mathcal{J}(\psi) = \sqrt{\det(\psi^*\psi)}$  et le co-jacobien  $\mathcal{J}^*(\psi) = \sqrt{\det(\psi\psi^*)}$ . Pour  $\mathbb{R}^n$  canoniquement euclidien, on retrouve la définition de [Fed69].

On définit encore le (co-)jacobien d'une application lipschitzienne comme le (co-)jacobien de sa différentielle. C'est une fonction mesurable définie presque partout.

**Théorème B.8** ([CdL16], 4.4). *Soit  $f : \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction lipschitzienne. Soient  $F$  une  $m$ -densité et  $\mu$  une  $m+n$ -densité sur  $\mathbb{R}^{m+n}$ . Soit  $\lambda$  une  $n$ -densité sur  $\mathbb{R}^n$  et  $A$  un borélien de  $\mathbb{R}^{m+n}$ . Alors*

$$\int_A \mathcal{J}^*(d_x f; \lambda^*, F_\mu^*) d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{A \cap f^{-1}\{y\}} d\mu_F \right) d\lambda(y). \quad (\text{B.9})$$

*Démonstration.* Posons

$$A_0 = \{x \in A : df_x \text{ non surjective}\}.$$

Sur  $A_0$ , le co-jacobien à gauche dans (B.9) s'annule. Donc la contribution de  $A_0$  à l'intégrale de gauche est nulle. Pour montrer que c'est également le cas dans l'intégrale de droite, l'argument utilisé par Federer à la page 249 dans [Fed69] peut être intégralement repris. Nous faisons donc dans la suite l'hypothèse simplificatrice que  $df$  est de rang maximal en tous les points de  $A$ . Le terme de droite dans (B.9) se réécrit sous la forme suivante, en changeant de mesures à l'aide des jacobiens :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{A \cap f^{-1}\{y\}} d\mu_F \right) d\lambda(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{A \cap f^{-1}(y)} d\mu_F \right) d\lambda(y) \\ & = \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{A \cap f^{-1}(y)} \mathcal{J}(\text{id}_{\ker df_x}; \mathcal{H}^m, F) d\mathcal{H}^m \right) \mathcal{J}(\text{id}_{\text{Im} df_x}; \mathcal{L}, \lambda) d\mathcal{L}(y). \end{aligned}$$

La variante de la formule de la coaire standard (B.4) transforme le dernier terme en

$$\int_A \mathcal{J}^*(df_x; \mathcal{L}^*, (\mathcal{H}^m)_{\mathcal{L}}^*) \cdot \mathcal{J}(\text{id}_{\ker df_x}; \mathcal{H}^m, F) \cdot \mathcal{J}(\text{id}_{\text{Im} df_x}; \mathcal{L}, \lambda) d\mathcal{L}(x).$$

Le premier terme du produit intégré est une réécriture de  $\mathcal{J}(df_x, \mathcal{H}^m, \mathcal{L})$  à l'aide de la définition du co-jacobien. Par multiplicativité du jacobien, d'une part

$$\mathcal{J}^*(df_x; \mathcal{L}^*, (\mathcal{H}^m)_{\mathcal{L}}^*) \mathcal{J}(\text{id}_{\text{Im} df_x}; \mathcal{L}, \lambda) = \mathcal{J}^*(df_x; \lambda^*, (\mathcal{H}^m)_{\mathcal{L}}^*), \quad (\text{B.10})$$

et d'autre part :

$$\mathcal{J}^*(df_x; \mathcal{L}^*, (\mathcal{H}^m)_{\mathcal{L}}^*) \cdot \mathcal{J}(\text{id}_{\ker df_x}; \mathcal{H}^m, F) = \mathcal{J}^*(df_x; \lambda^*, F_\mu^*) \cdot \mathcal{J}(\text{id}_{T_x \mathbb{R}^{n+m}}; \mathcal{L}, \mu). \quad (\text{B.11})$$



Finalement,

$$\begin{aligned} & \mathcal{J}^*(df_x; \mathcal{L}^*, (\mathcal{H}^m)_{\mathcal{L}}^*) \cdot \mathcal{J}(\text{id}_{\ker df_x}; \mathcal{H}^m, F) \cdot \mathcal{J}(\text{id}_{\text{Im}df_x}; \mathcal{L}, \lambda) \\ &= \mathcal{J}^*(df_x; \lambda^*; F_{\mu}^*) \cdot \mathcal{J}(\text{id}_{T_x \mathbb{R}^{n+m}}; \mathcal{L}, \mu). \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} & \int_A \mathcal{J}^*(df_x; \mathcal{L}^*, (\mathcal{H}^m)_{\mathcal{L}}^*) \cdot \mathcal{J}(\text{id}_{\ker df_x}; \mathcal{H}^m, F) \cdot \mathcal{J}(\text{id}_{\text{Im}df_x}; \mathcal{L}, \lambda) d\mathcal{L}(x) \\ &= \int_A \mathcal{J}^*(d_x f; \lambda^*, F_{\mu}^*) d\mu(x). \end{aligned}$$

C'est le terme de gauche de (B.9), ce qui termine la preuve. □

## C Notions alternatives de périmètre

### C.1 Incompatibilité avec les mesures de Hausdorff

Le calcul du périmètre au sens de la mesure de Hausdorff relative à une norme anisotrope sur  $R$  ne coïncide en général pas avec celui défini en 1.1.4. Décrivons un contre-exemple en dimension 2 :

Soit  $R = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$  muni de l'élément de volume  $\omega = dx \wedge dy$ . Soit  $t$  une constante,  $t > 1$ . On considère le segment  $\mathcal{S}$  dans  $R$  défini en coordonnées par :

$$\mathcal{S} = \{(x, y) : ty - x = 0, 0 < x < 1\}.$$

Alors

— D'une part

$$\mathcal{H}_{|\mathcal{S}}^1 = \pi^* \mathcal{L},$$

où  $\pi : (x, y) \rightarrow x$  est la première projection, et  $\mathcal{L}$  la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}$ . En particulier,  $\mathcal{H}^1(\mathcal{S}) = 1$ .

— D'autre part, soit  $\sigma = dx|_{\mathcal{S}}$ . Alors si  $\alpha = dy - \frac{dx}{t}$ , on vérifie que  $\sigma \wedge \alpha = dx \wedge dy - \frac{1}{t} dx \wedge dx = \omega$  et que  $\alpha|_{T\mathcal{S}} = 0$ . Par conséquent,

$$\int_{\mathcal{S}} \|\alpha\|^* \sigma = \int_0^1 \left(1 + \frac{1}{t}\right) = 1 + 1/t \neq 1.$$

Donc  $\mathcal{H}^1(\mathcal{S})$  n'est pas égal à la mesure de  $\mathcal{S}$  pour l'intégrand de Poincaré.

*Remarque C.1.* En dimension 2, ni  $\mathcal{H}^1(\mathcal{S})$ , ni  $\mu_F(\mathcal{S})$  pour  $F$  intégrand dual de l'intégrand de Poincaré, ne coïncident en général avec la longueur des courbes  $\mathcal{C}^1$  tracées sur une variété finslérienne.

Toutefois, il n'est pas exclu d'utiliser des mesures de Hausdorff euclidiennes pour élargir la définition du périmètre. Dans la proposition 1.21, nous avons donné une expression du périmètre pour un intégrand comme l'intégrale d'une fonction de poids sur les normales extérieures. Or, l'intégration sur  $\partial D$  à l'aide de la forme volume  $\sigma$  de la métrique riemannienne induite peut être remplacée par une mesure de Hausdorff. En effet, pour toute  $f \in \mathcal{C}(\partial D)$ ,

$$\int_{\partial D} f(x) d\mathcal{H}^{n-1}(x) = \int_{\partial D} f \sigma,$$

où  $\mathcal{H}^{n-1}$  est la mesure de Hausdorff de  $R$  en dimension  $n - 1$  relativement à la distance euclidienne. Ceci permet d'envisager de définir encore le périmètre pour des domaines dont le bord est moins régulier que  $\mathcal{C}^1$  par morceau, sous réserve de pouvoir encore décrire une normale extérieure  $\mathcal{H}^{n-1}$  presque partout. On peut montrer, par exemple, que c'est possible pour  $\mathcal{L}$ -presque tous les ensembles de niveaux d'une fonction lipschitzienne  $f : R \rightarrow \mathbb{R}$  donnée.

### C.2 Le contenu extérieur de Minkowski

Soit  $X$  un espace métrique et  $D \subset X$ . On se donne  $\mu$  une mesure borélienne sur  $X$ .

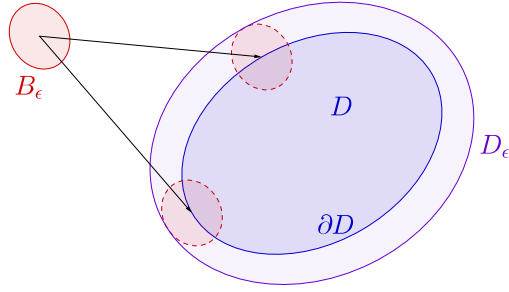


FIGURE 22 – L'ensemble  $D_\varepsilon$  dans un espace vectoriel normé.

**Définition C.2** (Contenu extérieur de Minkowski). *Pour tout  $\varepsilon > 0$ , on considère l'ensemble  $D_\varepsilon = \{x \in R : d(x, D) < \varepsilon\}$ . On définit :*

$$\underline{\mathcal{M}}(D) := \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-1} \mu(D_\varepsilon \setminus D). \quad (\text{C.3})$$

$$\overline{\mathcal{M}}(D) := \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-1} \mu(D_\varepsilon \setminus D). \quad (\text{C.4})$$

*Lorsque ces deux quantités sont égales, on les désigne par  $\mathcal{M}(D)$ , que l'on appelle contenu extérieur de Minkowski de  $D$ .*

**Remarque C.5.** Si  $X$  est un espace affine normé,  $D_\varepsilon$  a une double nature : c'est à la fois une somme de Minkowski  $D + B_\varepsilon$  (notion affine) et le voisinage des points à proximité  $\varepsilon$  (notion métrique), c.f. la figure 22.

Un avantage du contenu de Minkowski est qu'il est la définition du périmètre la mieux adaptée pour obtenir l'inégalité isopérimétrique dans les espaces vectoriels normés à partir de l'inégalité de Brunn-Minkowski sur les sommes d'ensembles (Nous privilégions une autre approche en section 1.2). En effet on dispose pour les sommes de Minkowski de l'inégalité suivante :

**Proposition C.6** (Inégalité de Brunn-Minkowski). *Soit  $R$  un espace vectoriel,  $\mu$  une mesure de Haar. Quels que soient  $A, B \subset R$  compacts,  $A + B$  est compact, donc  $\mu$ -mesurable<sup>31</sup>, et*

$$\mu(A + B)^{\frac{1}{n}} \geq \mu(A)^{\frac{1}{n}} + \mu(B)^{\frac{1}{n}}. \quad (\text{C.7})$$

*Démonstration.* L'inégalité découle directement du lemme suivant ([Ber90] 11.8.8.1, dont nous reproduisons la preuve, voir aussi [Fed69] 3.2.41) :

**Lemme C.8.** *Soit  $\mathcal{L}^n$  la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^n$ ,  $A$  et  $B$  deux compacts, alors la fonction*

$$\lambda \mapsto \mathcal{L}(\lambda A + (1 - \lambda)B)^{1/n}$$

*est concave.*

---

31. C'est la raison principale pour laquelle nous énonçons l'inégalité pour des compacts. Même si  $A$  et  $B$  sont  $\mu$ -mesurables, il n'est pas clair que  $A + B$  le soit automatiquement.

Commençons par vérifier le lemme quand  $A$  et  $B$  sont deux parallélotopes produits de  $n$  segments de longueurs  $a_1, \dots, a_n$  et  $b_1, \dots, b_n$  : on pose

$$u_i := \frac{a_i}{\lambda a_i + (1-\lambda)b_i} \quad ; \quad v_i := \frac{b_i}{\lambda a_i + (1-\lambda)b_i}.$$

Alors

$$\frac{\lambda \mathcal{L}(A)^{\frac{1}{n}} + (1-\lambda) \mathcal{L}(B)^{\frac{1}{n}}}{\mathcal{L}(\lambda A + (1-\lambda)B)^{\frac{1}{n}}} = \lambda \prod_i u_i^{1/n} + (1-\lambda) \prod_i v_i^{1/n} \leq \frac{\lambda}{n} \sum_i u_i + \frac{1-\lambda}{n} \sum_i v_i.$$

La dernière inégalité étant l'inégalité arithmético-géométrique. Finalement  $\lambda u_i + (1-\lambda)v_i = 1$ . Ensuite, supposons que  $A$  (resp.  $B$ ) est une union de  $a$  (resp.  $b$ ) parallélotopes disjoints. On va raisonner par récurrence sur  $a+b$ . Si  $a > 1$ , ce que l'on peut supposer par symétrie, alors il existe un hyperplan affine  $H = \{x_\alpha = \text{cste}\}$  séparant strictement au moins deux des  $A_i$  de sorte que  $A = A^+ \cup A^-$ , avec  $A^+$  union de  $a^+$  parallélotopes et  $A^-$  union de  $a^-$  parallélotopes,  $\max(a^+, a^-) < a$ . On choisit  $H' = \{x_\alpha = \text{cste}'\}$ , coupant  $B$  de sorte qu'avec les notations  $B^+ = B \cap \{x_\alpha > \text{cste}'\}$  et de même pour  $B^-$  :

$$\frac{\mathcal{L}(B^+)}{\mathcal{L}(B^-)} = \frac{\mathcal{L}(A^+)}{\mathcal{L}(A^-)}. \quad (\text{C.9})$$

On peut alors vérifier que  $\max(b^+, b^-) \leq b$  d'une part, et

$$\mathcal{L}(\lambda A + (1-\lambda)B) \geq \mathcal{L}(\lambda A^+ + (1-\lambda)B^+) + \mathcal{L}(\lambda A^- + (1-\lambda)B^-).$$

d'autre part. Par hypothèse de récurrence, comme  $a^+ + b^+ < a + b$  et  $a^- + b^- < a + b$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\lambda A + (1-\lambda)B) &\geq \left( \lambda \mathcal{L}(A^+)^{1/n} + (1-\lambda) \mathcal{L}(B^+)^{1/n} \right)^n \\ &\quad + \left( \lambda \mathcal{L}(A^-)^{1/n} + (1-\lambda) \mathcal{L}(B^-)^{1/n} \right)^n \\ &= \left( \lambda \mathcal{L}(A)^{1/n} + (1-\lambda) \mathcal{L}(B)^{1/n} \right)^n, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé la condition (C.9).

Finalement, soient  $A$  et  $B$  deux compacts de  $\mathbb{R}^n$ . Pour tout  $i \in \mathbb{N}$ , soit  $C_i$  le cube  $(0, 2^{-i})^n$  dans  $\mathbb{R}^n$ , et pour tout  $v \in \mathbb{Z}^n$ ,  $C_i^v = C_i + \frac{v}{2^n}$ . On pose

$$A_i := \bigcup_{v \in \mathbb{Z}^n : C_i^v \cap A \neq \emptyset} C_i^v$$

$$B_i := \bigcup_{v \in \mathbb{Z}^n : C_i^v \cap B \neq \emptyset} C_i^v$$

Alors  $\bigcap_i A_i = A$ ,  $\bigcap_i B_i = B$ , et  $\bigcap_i A_i + B_i = A + B$ ; de plus  $\mu(A) = \lim_i \mu(A_i)$ ,  $\mu(B) = \lim_i \mu(B_i)$  et  $\mu(A + B) = \lim_i \mu(A_i + B_i)$ ; le cas général se déduit du cas des unions finies de cubes traité précédemment.  $\square$

**Corollaire C.10.** Soit  $R$  espace vectoriel normé muni d'une mesure de Haar  $\mu$ , et  $D$  un domaine de  $R$ . Alors

$$\underline{\mathcal{M}}(C) \geq n\mu(B_1)\mu(D)^{\frac{n-1}{n}}. \quad (\text{C.11})$$

*Démonstration.* Par définition de  $D_\varepsilon$ ,  $\mu(D_\varepsilon \setminus D) = \mu(D + B_\varepsilon) - \mu(D)$ . D'après l'inégalité (C.7) de Brunn-Minkowski,

$$\mu(D + B_\varepsilon) \geq \left( \mu(D)^{1/n} + \mu(B_\varepsilon)^{1/n} \right)^n \geq \mu(D) + n\mu(B_\varepsilon)^{\frac{1}{n}} \mu(D)^{\frac{n-1}{n}}.$$

Par homogénéité,  $\mu(B_\varepsilon)^{\frac{1}{n}} = \varepsilon\mu(B_1)$ , d'où

$$\frac{\mu(D + B_\varepsilon) - \mu(D)}{\varepsilon} \geq \varepsilon^{-1} \left( n\mu(B_1)\varepsilon\mu(D)^{\frac{n-1}{n}} \right) = n\mu(B_1)\mu(D)^{\frac{n-1}{n}}.$$

On obtient (C.11) par passage à la limite quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ . □

(C.11) peut être entendue comme une inégalité isopérimétrique. Toutefois l'égalité du contenu extérieur  $\mathcal{M}$  avec les définitions précédentes du périmètre n'est pas immédiate. On peut quand même vérifier qu'elle a lieu quand le bord est assez régulier :

**Théorème C.12** ([CdL16], th. 5.4). *On suppose que  $D$  est un domaine borné à bord  $\mathcal{C}^2$  dans un espace vectoriel normé  $R$  muni d'une mesure de Haar  $\mu$ . Alors le contenu extérieur de Minkowski de  $D$  existe, et coïncide avec le périmètre au sens défini par 1.8.*

Pour un énoncé tel que celui-ci, affaiblir la régularité du bord de  $\mathcal{C}^2$  à  $\mathcal{C}^1$  augmente sensiblement la difficulté. Ceci peut se constater simplement dans le cas euclidien : tant que la courbure de  $\partial D$  est bornée, on envoie par projection un  $\varepsilon$ -voisinage de  $\partial D$  sur un  $\varepsilon$ -voisinage de la section nulle dans le fibré normal trivialisé, avec un jacobien arbitrairement proche de 1, quand  $\varepsilon$  est suffisamment petit. Ce type de raisonnement n'est plus possible quand  $\partial D$  est seulement  $\mathcal{C}^1$ .

## D L'argument de Moser

### D.1 Argument de Moser

Dans la section 4.4 nous avons utilisé le

**Théorème D.1.** *Soit  $V$  une variété lisse compacte connexe orientable,  $\omega$  et  $\nu$  deux formes sur  $V$  en degré maximal qui confèrent même orientation et volume total à  $V$ . Alors il existe  $\psi \in \text{Diff}(V)$  telle que*

$$\omega = \psi^* \nu.$$

Il semble que ce théorème doit être attribué à Moser ; la preuve que nous donnons est issue de [Thu97, 3.1.16]. Le lemme clé qui suit est la version infinitésimale du théorème.

**Lemme D.2** (Moser). *Soit  $\alpha$  une  $n$ -forme non nulle sur  $V$ . Pour toute  $(n-1)$ -forme  $\beta$ , il existe  $X \in \Gamma(TV)$  tel que  $\mathcal{L}_X \alpha = d\beta$ .*

*Démonstration.* D'après la formule de Cartan, il est équivalent de demander que  $d(X \lrcorner \alpha) = d\beta$ . Il suffit donc de poser  $X = \Psi_\alpha(\beta)$  avec les notations de 1.1.2.  $\square$

À présent, posons  $\alpha_t = (1-t)\omega + t\nu$  pour  $t \in [0, 1]$ , et soit  $X_t$  un champ dépendant du temps tel que  $\mathcal{L}_{X_t} \alpha_t = d\beta$ . On prend finalement pour  $\psi$  le flot de  $X_t$  au temps 1.

### D.2 Une version semi-locale du théorème de Darboux

L'argument de Moser s'applique également en topologie symplectique où il produit le théorème de stabilité de Moser [MS98, 3.17]. Voici la version symplectique :

**Proposition D.3.** *Soit  $M$  une variété compacte lisse,  $\{\omega_t\}$  une famille de formes symplectiques sur  $M$  telle que*

$$\frac{d}{dt} \omega_t = d\sigma_t \tag{D.4}$$

*pour une certaine famille de 1-formes  $\sigma_t$ . Alors il existe une famille de difféomorphismes  $\psi_t$  de  $M$  telle que*

$$\psi_t^* \omega_t = \omega_0$$

*pour tout  $t$ .*

*Démonstration.* Nous voulons  $\psi_t^* \omega_t = \omega_0$ , ce qui implique  $\frac{d}{dt} \psi_t^* \omega_t = 0$  pour tout  $t$ . Supposons que  $\psi_t$  est le flot engendré par le champ de vecteurs dépendant du temps  $X_t$ . Alors d'après la formule de Cartan

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \psi_t^* \omega_t &= \psi_t^* \left[ \frac{d}{dt} \omega_t + \mathcal{L}_{X_t} \omega_t \right] \\ &= \psi_t^* \left[ \frac{d}{dt} \omega_t + \iota(X_t) d\omega_t + d\iota(X_t) \omega_t \right]. \end{aligned} \quad \square$$

Cette trivialisations semi-locale est utile en topologie symplectique, par exemple pour définir l'indice de Maslov.

## E Inégalité systolique de Loewner

Historiquement, il s'agit de la première inégalité systolique. Nous détaillons la preuve esquissée au tout début de [Gro07, chapitre 4].

**Théorème E.1** (Loewner 1949). *Soit  $T = (T^2, g)$  un tore riemannien,  $\ell$  la longueur minimale d'un 1-cycle non homologue à 0 sur  $T$ . Alors le volume  $\nu(g)$  de  $T$  vérifie*

$$\nu(g) \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \ell^2 \quad (\text{E.2})$$

*Avec égalité si et seulement si  $T$  est un tore plat équilatéral (c'est-à-dire de la forme  $\mathbb{E}^2/\Delta$  où  $\Delta = \mathbb{Z}u \oplus \mathbb{Z}v$  avec  $\|u\| = \|v\|$  et  $\angle(u, v) = \pi/3$ ).*

*Démonstration.*  $T$  est une variété riemannienne orientable de dimension 2; d'après le théorème d'uniformisation de Poincaré, la métrique  $g$  est conforme à une métrique de courbure constante, ici une métrique plate car  $T$  est compacte de genre 1. On peut donc trouver un réseau  $\Lambda$  de  $\mathbb{R}^2$  et une application  $f : \mathbb{R}^2/\Lambda \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  telle que  $T$  est isométrique à  $(\mathbb{R}^2/\Lambda, fg_0)$  où  $g_0$  est la métrique naturelle sur  $\mathbb{E}^2/\Lambda$ . Le groupe  $G$  des isométries de  $g_0$  est un groupe de Lie compact (de la forme  $F \times T^2$  où  $F$  est fini; en particulier il opère transitivement); soit  $\mu$  une mesure de Haar à gauche sur  $G$ . Pour tout  $x \in T$  on pose :

$$\tilde{f}(x) = \int_G f(h.x) d\mu(h)$$

Puis  $\tilde{g} = \tilde{f}g_0$ . Il vient

$$\nu(\tilde{g}) = \int_T \tilde{f} = \int_G d\mu(h) \int_T f(h.x) = \int_T f = \nu(g)$$

Tandis que si  $\gamma$  est une géodésique fermée de longueur  $\ell$  pour la métrique  $g$ , alors la longueur  $\tilde{\ell}$  de  $\gamma$  pour la métrique  $\tilde{g}$  est

$$\tilde{\ell} = \int_\gamma \int_G \sqrt{f(h.x)} dx d\mu(h) = \int_G d\mu(h) \int_{h.\gamma} \sqrt{f} \geq \ell$$

La dernière inégalité vient de ce que  $h.\gamma$  est toujours non nul en homologie, donc de longueur  $\geq \ell$ . Finalement il reste à montrer que  $\nu(\tilde{g}) \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \tilde{\ell}^2$ . Puisque  $G \curvearrowright T$  est transitive,  $\tilde{f}$  est constante et  $\tilde{g}$ ; autrement dit  $\tilde{g}$  est la métrique d'un tore plat et quitte à renormaliser, on peut supposer  $\tilde{g} = g_0$ . Soit  $\mathcal{D}$  le domaine de Dirichlet standard représentant les orbites  $\text{SL}(2, \mathbb{Z}) \backslash \mathcal{H}$ ; il existe un unique  $\tau \in \mathcal{D}$  tel que  $\Lambda \simeq \mathbb{Z}[\tau]$  à similitude près, et

$$\frac{\nu(\tilde{g})}{\tilde{\ell}^2} \geq \text{covol}(\Lambda) = \Im \tau \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Le cas d'égalité est obtenu pour  $\tau = e^{2i\pi/3}$ ; soit pour le réseau  $\Delta$  des entiers d'Eisenstein.  $\square$

## Références

- [BBI01] D. Burago, Y. Burago, and S. Ivanov. *A Course in Metric Geometry*. Number 33 in Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, 2001.
- [BCS00] D. Bao, S.-S. Chern, and Z. Shen. *An Introduction to Riemann-Finsler Geometry*. Number 200 in Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2000.
- [Ber90] M. Berger. *Géométrie*, volume 2. Nathan, 2 edition, 1990.
- [BI95] D. Burago and S. Ivanov. On asymptotic volume of tori. *Geometric and Functional Analysis*, (5) :800–808, 1995.
- [BI98] D. Burago and S. Ivanov. On asymptotic isoperimetric constant of tori. *Geom. Funct. Anal.*, 8(5) :783–787, 1998.
- [BM94] J. Brothers and F. Morgan. The isoperimetric theorem for general integrands. *Michigan Math Journal*, 41(3) :419–431, 1994.
- [Bru87] H. Brunn. *Über Ovalen und Eiflächen*. PhD thesis, Ludwig Maximilian University of Munich, 1887.
- [CdL16] D. Ciotaru and J. de Lira. A note on the area and coarea formulas for general volume densities and some applications. *Manuscripta Math.*, 149(2-4) :471–506, 2016.
- [Che94] S.-S. Chern. Hassler Whitney (23 march 1907-10 may 1989). *Proceedings of the American Philosophical Society*, 138(3) :465–467, 1994.
- [CSC93] T. Coulhon and L. Saloff-Coste. Isopérimétrie pour les groupes et les variétés. *Revista Matemática Iberoamericana*, 9(2) :293–314, 1993.
- [Fed69] H. Federer. *Geometric Measure Theory*. Springer Verlag, 1969.
- [Fed74] H. Federer. Real flat chains, cochains and variational problems. *Indiana University math. Journal*, 24, 1974.
- [FF60] H. Federer and W. H. Fleming. Normal and integral currents. *Annals of Mathematics*, 72(3) :458–520, 1960.
- [FMP10] A. Figalli, F. Maggi, and A. Pratelli. A mass transportation approach to quantitative isoperimetric inequalities. *Invent. math.*, 182 :167–211, 2010.
- [Gar02] R.J. Gardner. The Brunn-Minkowski inequality. *Bulletin of the AMS*, 39(3) :355–405, 2002.
- [Gro86] M. Gromov. Isoperimetric inequalities in riemannian manifolds. In V. D. Milman and G. Schechtman, editors, *Asymptotic Theory of Finite Dimensional Normed Spaces*, volume 1200 of *Lecture Notes in Mathematics*, pages 125–129. Springer, 1st edition, 1986.



- [Gro07] M. Gromov. *Metric Structures for Riemannian and Non-Riemannian Spaces*, volume 152 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser, 2nd edition, 2007.
- [Hat02] A. Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2002.
- [Jos05] J. Jost. *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*. Universitext. Springer Verlag, fourth edition, 2005.
- [KL95] M. Kapovich and B. Leeb. On asymptotic cones and quasi-isometry classes of fundamental groups of 3-manifolds. *Geometric & Functional Analysis GFA*, 5(3) :582–603, 1995.
- [Kno57] H. Knothe. Contributions to the theory of convex bodies. *Michigan Math. J. Volume 4, Issue 1 (1957)*, 39-52., 4(1) :39–52, 1957.
- [LL11] F. Laudenbach and F. Labourie. *Transversalité, courants et théorie de Morse*. Editions de l’Ecole polytechnique and Ellipses, 2011.
- [MS98] D. McDuff and D. Salamon. *Introduction to Symplectic Topology*. Oxford mathematical monographs. Clarendon Press, 1998.
- [Oss78] R. Osserman. The isoperimetric inequality. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 6(84) :1182 – 1238, 1978.
- [Pan83] P. Pansu. Croissance des boules et des géodésiques fermées dans les nilvariétés. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 3 :415–445, 9 1983.
- [Pan99] P. Pansu. Profil isopérimétrique, métriques périodiques et formes d’équilibre des cristaux. *ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 4 :631–665, 1 1999.
- [Tay74] J. E. Taylor. Existence and structure of solutions to a class of nonelliptic variational problems. *Proc. Sympos. Pure Math.*, 27 :481–489, 1974.
- [Tay78] J. E. Taylor. Crystalline Variational Problems. *Bulletin of the AMS*, 84(4) :568–588, July 1978.
- [Thu97] W. Thurston. *Three-Dimensional Geometry and Topology*, volume 1 of *Princeton Math. Series*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1997.
- [Whi57] H. Whitney. *Geometric Integration Theory*. Princeton University Press, 1957.

## Index

- asymptotique
  - constante isopérimétrique, 50, 63
  - volume, 43, 63
- Brunn
  - inégalité, 17
- Brunn-Minkowski, inégalité, 91
- calibration, 46, 49
- Cartan, formule, 60
- Cayley, graphe, 76, 84
- co-densité, 11
- co-jacobien, 87
- co-masse, 29
- coaire, formule, 18, 87
- cohomologie, 48
  - des tores, 46
  - $L^p$ , 44
- cône asymptotique, 41
- courant
  - poussé en avant, 25
  - produit, 26
- courants, 24
  - $(k, \varepsilon)$ -rationnels, 69
  - étalés, 26, 33
  - entiers, 31
  - $k$ -rationnels, 56
  - normaux, 28
  - rectifiables, 31
- cristal, 81
- cuboctaèdre, 81
- dilatation, 56, 59, 61
- distribution, 24
- dualité, 11, 24, 50, 52, 81
- énergie de liaison, 75
- Federer-Fleming
  - théorème de déformation, 32
  - théorème isopérimétrique, 36
- Finsler
  - métrique, 15
  - métrique sous-finslérienne, 85
- Gromov-Hausdorff, convergence, 41, 79
- groupe
  - moyennable, v, 75
  - nilpotent, 84
- Hahn-Banach, théorème, 30, 45
- Hausdorff, mesure, 90
- Heisenberg, groupe, 17
- homogénéisation, 43, 50
- homologie
  - réelle, 34
- Hurewicz, morphisme, 38
- hyperbolique
  - espace, 17, 83
- intégrand, 9
  - paramétrique, 15
- isopérimétrique
  - dimension, 17, 84
  - domaines extrémaux, 51
  - inégalité relative, 66
  - profil, 50
- jacobien, 87
- $k$ -densité, 9
- Kähler, forme, 29, 46
- Liouville
  - 1-forme, 16
- masse, 28
- Minkowski
  - contenu extérieur, 19, 91
  - somme, 91
- norme
  - $\mathbf{N}$ , 29
  - $\mathfrak{b}$ , 30
  - cristalline, 81
  - limite, 37
  - stable, iv, 37, 41
- opérateur
  - d'homotopie, 34

de bord, [25](#), [27](#)

périmètre, [10](#), [16](#), [75](#), [90](#)

Poincaré

- dualité, [iv](#), [14](#), [33](#), [46](#), [65](#), [72](#)
- intégrand, [13](#)

régularisation, [34](#)

représentation des courants, [28](#)

revêtement abélien, [41](#)

semi-continuité, [56](#), [60](#)

Sobolev, inégalité, [18](#)

$\text{Sol}_3$  (groupe), [v](#), [17](#)

solide covalent, [75](#), [80](#)

Stokes

- théorème, [22](#), [27](#), [82](#), [83](#)

systole, [38](#)

tranche, [57](#)

transport, [86](#)

- de Brenier, [83](#)
- de Knothe, [20](#), [22](#)