Parimaths débutants – 19 novembre 2016
Pavages et polyèdres

Gabriel Pallier

On trouve ici des questions et des exercices. Les questions n'ont pas forcément de bonne ou meilleure réponse, l'objectif est de nourrir la discussion. Les exercices demandent en principe plus de réflexion, sur une feuille de papier. Les exercices avec * sont plus longs (mais pas nécessairement plus difficiles), ils ne seront pas toujours corrigés, mais il peut être intéressant de les faire plus tard.

Polyèdres

Question 1. Qu'est-ce qu'un polyèdre ? Qu'est-ce qu'un polyèdre régulier ?

Considérons un ballon de baudruche $\mathcal{B}$. Nous allons supposer que c'est un ballon mathématique idéal, qui est infiniment petit (c'est-à-dire réduit à un point) quand il est dégonflé, mais que l'on peut gonfler en une sphère aussi grande que l'on veut. On dit qu'un polyèdre P est *convexe* si quand on le place dans ce ballon de baudruche assez gonflé (ne me demandez pas comment !), et que l'on dégonfle le ballon progressivement, il finit par envelopper exactement le polyèdre P. En général, on dit que le volume occupé par le ballon à la fin est l'*enveloppe convexe* de P.

Exercice 1. Dessiner des polyèdres convexes, des polyèdres non convexes.

Question 2. Êtes-vous satisfait de cette définition ? Peut-on donner d'autres définitions équivalentes ? Comment définir un polygone convexe ? Y a-t-il des polygones réguliers non convexes ?

Question 3. Soit P un polyèdre convexe. On suppose que les faces $f_1, \dots f_q$ se rencontrent au sommet s. Quel peut-on dire de la somme des angles des polygones f_j au sommet s ?

Si P est un polyèdre régulier convexe, ses faces sont des polygones réguliers convexes.

Exercice 2. Trouver tous les polyèdres réguliers convexes (on les appelle aussi solides de Platon). Compter leurs faces, arêtes et sommets. Vérifier pour chacun la formule d'Euler

$$S - A + F = 2, \tag{1}$$

où S est le nombre de sommets, A le nombre d'arêtes, F le nombre de faces.

Dans la suite, on désigne par $\{p, q\}$ le polyèdre convexe régulier dont les faces sont des polygones réguliers convexes à p côtés, et tel qu'en chaque sommet se rencontrent exactement q faces. On décide aussi que les arêtes sont de longueur 1. L'exercice précédent nous convainc qu'un tel polyèdre est unique (quitte à le faire tourner, éventuellement).

Exercice 3. Montrer que le nombre de faces de $\{p, q\}$ est donné par la formule

$$F = \frac{4q}{2p + 2q - pq}, \tag{2}$$

et donner des formules analogues pour le nombre d'arêtes et le nombre de sommets.

Exercice 4. On dit que $\{q, p\}$ est le polyèdre *dual* de $\{p, q\}$. Comment passer géométriquement d'un polyèdre à son dual ? Pour tous les polyèdres de la liste de l'exercice 2, regrouper chaque polyèdre avec son dual.

Exercice 5. * Pour chaque polyèdre régulier convexe, calculer le rayon de la sphère inscrite (la plus grande contenue dedans) et celui de la sphère circonscrite (la plus petite qui le contient).

Indication 1 (5). On pourra faire un usage massif du théorème de Pythagore. Pour l'icosaèdre, découper en deux pyramides pentagonales et un antiprisme (par exemple).

La projection stéréographique

On reprend notre ballon $\mathcal{B}$ qui enveloppe le polyèdre convexe P. On trace les arêtes de $\mathcal{P}$ sur le ballon, avec un feutre, puis on regonfle le ballon. Par exemple si P est l'*hexaèdre régulier*, aka le cube, voici ce que cela donne :

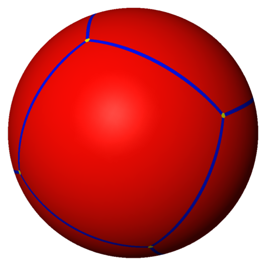

FIGURE 1 – Le ballon cubique regonflé (image provenant du jeu KaleidoTile de J. Weeks)

Ensuite, on prend une aiguille et on perce le ballon avec. On étale le ballon percé sur le plan (par exemple, en le clouant avec des punaises). Souvenons-nous que c'est un ballon mathématique, il est infiniment extensible... donc on arrive à recouvrir tout le plan, si l'on veut en mettant des punaises aussi loin que nécessaire. Quitte à déformer le ballon aplati, on peut supposer [1] que les traits au feutre sont tout droits. On regarde ensuite le dessin sur le plan. Pour le cube, cela donne l'un des trois dessins suivants, selon qu'on a percé le ballon dans une face, sur un sommet ou sur une arête :

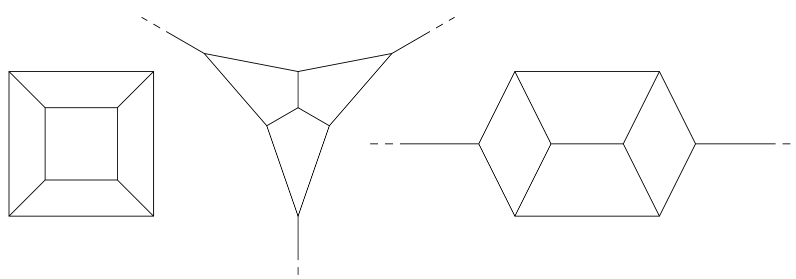

FIGURE 2 – Le ballon cubique percé étendu sur le plan

1. On pourrait décrire cela complètement géométriquement, voir à ce sujet le film Dimensions (dimension-math.org). En théorie, les arêtes que l'on obtient seraient des arcs de cercle mais ici on s'intéressera seulement à l'allure du dessin obtenu.

Question 4. Sur chacun des trois dessins, pouvez-vous retrouver les six faces du cube ?

On dit que l'on a effectué une *projection stéréographique* du polyèdre P sur le plan.

Exercice 6. Faire les dessins pour tous les solides de Platon (on pourra commencer par le tétraèdre, puis l'octaèdre, en perçant le ballon à l'intérieur d'une face).

Question 5. Soit P un polyèdre convexe dont on a dessiné une projection stéréographique. Peut-on retrouver une projection stéréographique du polyèdre dual P' ? Si oui comment ?

Quand on a percé le ballon à l'intérieur d'une face, le dessin obtenu est un *graphe planaire*, c'est à dire un ensemble fini de points dessiné sur le plan (les sommets), reliés par des arêtes (éventuellement tordues) qui ne se croisent pas. On suppose aussi que le graphe est en un seul morceau (on peut voyager de n'importe quel sommet à n'importe quel autre, seulement en suivant les arêtes). Les graphes planaires eux aussi ont des faces ; ce sont les régions du plan délimitées par des arêtes. Il y a une face infinie à l'extérieur qu'il ne faut pas oublier (cf. la question 4).

Exercice 7. * (Difficile) La formule d'Euler (1) est aussi une formule pour les graphes planaires. On propose une esquisse de preuve (attribuable peut-être à Cauchy en 1811, mais cela se discute) de la formule d'Euler pour les graphes planaires (donc pour les polyèdres convexes, vue la projection stéréographique). On part donc d'un graphe planaire. .

1. Vérifier que supprimer une arête ne change pas la valeur de $S - A + F$, sauf si cela coupe le graphe en deux morceaux.
2. On supprime donc successivement des arêtes sans couper le graphe en deux morceaux. Au bout d'un moment ce n'est plus possible ; montrer qu'alors le graphe est un arbre, c'est à-dire qu'entre deux sommets différents il existe un unique chemin qui ne repasse pas deux fois au même endroit.
3. Vérifier qu'un arbre a une seule face, et que son nombre d'arêtes est égal à son nombre de sommets diminué de 1. Conclure.

Exercice 8 (Le problème des trois maisons)**.** On souhaite relier trois maisons A, B, C à trois arrivées d'eau, d'éléctricité et de gaz W, E, G sans que les conduites ne se croisent. Montrer que ce n'est pas possible sur le plan (ou sur la planète Terre, que l'on assimile à une sphère). Montrer que cela serait par contre possible sur une planète en forme de bouée de sauvetage ou de donut.

Pavages

Question 6. Qu'est-ce qu'un pavage ?

Ici on ne s'intéressera qu'à des pavages très simples : ceux du plan par des polygones convexes et réguliers. On appelles ces polygones les *tuiles* du pavage.

Exercice 9. En reprenant la méthode de l'exercice 2, trouver tous les pavages du plan dont les tuiles sont toutes le même polygone régulier. Pour chacun, combien de couleur faut-il au minimum pour les colorier ?

Question 7. Peut-on définir le dual d'un pavage, et si oui comment ?

Comme pour les polyèdres, on désigne le pavage régulier par le symbole $\{p, q\}$ où p est le nombre de côté des tuiles et q le nombre de tuiles à chaque sommet.

Pavages uniformes

On dit qu'un pavage du plan est *uniforme* (et convexe) s'il est tel que :

1. Toutes ses tuiles sont des polygones convexes
2. Pour toute paire de sommets $\{s, s'\}$, il existe une transformation du plan qui préserve le pavage (on dit que c'est une symétrie du pavage) et qui envoie s sur s'.

Concrètement, la condition 2 dit qu'il n'y a qu'un seul type de sommet. Pour trouver des pavages uniformes, une méthode est de transformer les pavages réguliers que nous avons énumérés dans l'exercice 9. à l'aide d'opérations. La première et la plus simple de ces opérations est la troncation, qui consiste à faire apparaître une nouvelle face à chaque sommet. Voici ce qu'elle donne sur le pavage $\{4, 4\}$:

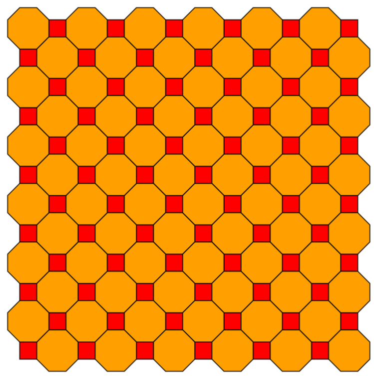

FIGURE 3 – Le pavage $\{4, 4\}$ tronqué. Les tuiles sont des carrés et des octaèdres.

Question 8. Peut-on faire la même opération sur un polyèdre ? Si oui quel est le résultat (avec un cube par exemple). Comment expliquer le terme de troncature ? Dessiner les projections sétéographiques.

Question 9. Quel est le pavage dual de celui de la figure précédente ? Est-ce que ses tuiles sont régulières ?

Exercice 10. Pour les autres pavages réguliers trouvés dans l'exercice 9, dessiner les pavages tronqués associés, ainsi que leur duaux.

Une autre opération est l'adoucissement. Elle consiste à écarter les faces, et à combler les trous par des des triangles équilatéraux. La voici figurée sur le dodécaèdre régulier.

Exercice 11. Adoucir le pavage $\{4, 4\}$. Dessiner son dual.

Exercice 12. Expliquer comment les pavages suivants ont été obtenus (il n'y a pas une seule manière en général).

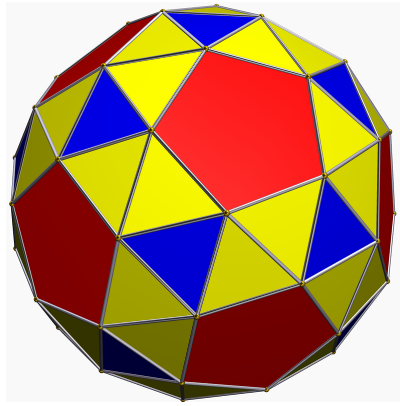

FIGURE 4 – Dodécaèdre adouci.

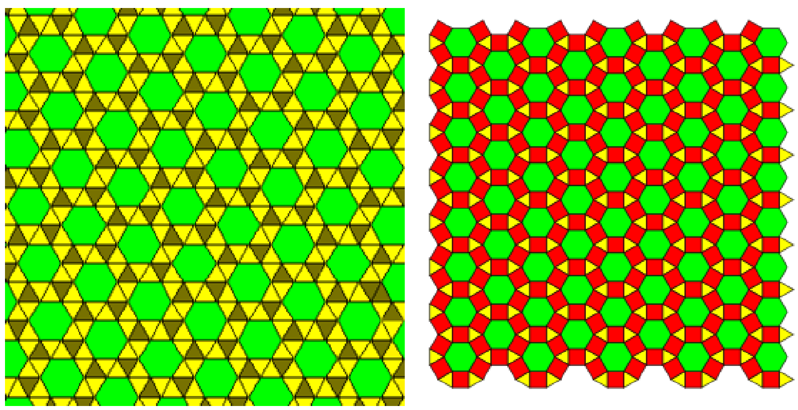

FIGURE 5 – Quelques pavages uniformes...

Polyèdres uniformes, polyèdres étoilés

Pour aller plus loin...

Voici quelques références concernant ce qui a été traité ici. Ce n'est bien sûr pas exhaustif, et j'ignore beaucoup de choses :

— Au sujet de la formule d'Euler, de ses exemples et contre-exemples, Wikipedia est très complet. On pourra aussi voir `http://www.ics.uci.edu/~eppstein/junkyard/euler/` (en anglais) où se trouvent 20 preuves différentes (de difficultés inégales) . Enfin, il existe un remarquable ouvrage d'Imre Lakatos, *Preuves et réfutations* sur la notion de preuve dans l'histoire des mathématiques, dont le filigrane est la formule d'Euler.

— Pour contempler la projection stéréographique : `https://www.youtube.com/embed/cL7BpDrRc4s?list=PLw2BeOjATqrtiLPWvH_VeXmmBRmwcEwLz` chapitre 2 du film *Dimensions*.