DEVOIR MAISON D'ALGÈBRE LINÉAIRE

Modalités. Le DM est à rendre pour le **17 février 2021**.

Il est possible de travailler en binôme. N'oubliez pas d'indiquer dans ce cas les deux noms lisiblement en tête de copie.

Le DM est constitué de deux exercices de longueur comparable.

On trouvera les données utiles pour certaines questions en téléchargeant le fichier à l'adresse

`https://webusers.imj-prg.fr/~gabriel.pallier/DMlin.py`

Il n'est pas nécessaire de l'exécuter ni de disposer d'un interpréteur python pour l'ouvrir, un simple éditeur de texte suffira.

Dans l'exercice 2, pour les questions marquées du signe « ⌨ » vous pouvez utiliser le calculateur de matrices de WIMS en ligne, disponible à l'adresse

`https://wims.univ-cotedazur.fr/wims/`

ou tout autre logiciel de calcul scientifique de votre choix.

Exercice 1 à propos de PageRank

(A) Résoudre l'exercice ci-contre. (Extrait de *Terminale Mathématiques Expertes Programme 2020*, collection Barbazo, Hachette Presse.)

(B) Donner l'allure de la probabilité invariante π quand $p = 0$ et quand $p = 1$. Interpréter.

(C) On a demandé à 3 élèves de Terminale d'écrire un script Python permettant d'étudier le temps que met la distribution pour être presque stationnaire (en fonction de p). La consigne correspondante ainsi que leurs programmes sont donnés en annexe 1, ainsi que dans le fichier `DMlin.py`.

Ces instructions permettent-elle d'atteindre le résultat attendu ? Si non, les corriger pour que cela soit le cas. Proposer une méthode en une seule fonction, en Python ou en pseudo-code.

PageRank

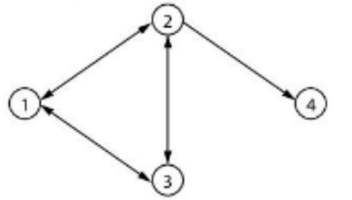
Le PageRank est l'algorithme d'analyse des liens hypertextes utilisé par Google pour le classement des pages web par ordre de pertinence. Il utilise une méthode probabiliste.

Imaginons un internaute qui « surfe » au hasard.

Quand il est sur une page :

- soit il choisit une page au hasard sur l'ensemble du réseau, avec une probabilité p (y compris la page où il se trouve) ;
- soit, avec une probabilité $1-p$, il clique au hasard, sur un des liens disponibles, depuis la page où il se trouve, avec équiprobabilité des liens.

Considérons le graphe d'un mini-web, à quatre pages.



On note X_n la position du surfeur au bout de n étapes en supposant qu'il parte d'une des pages.

$X_n \in \{1;2;3;4\}$.

On note π_n la matrice ligne

$\pi_n = (P(X_n=1)\ \ P(X_n=2)\ \ P(X_n=3)\ \ P(X_n=4))$.

1. a. Montrer que :

$P(X_{n+1}=1) = (1-p)\left(\frac{1}{3}P(X_n=2) + \frac{1}{2}P(X_n=3)\right) + \frac{p}{4}$.

(On pourra s'aider d'un arbre de probabilité.)

b. De la même façon, écrire $P(X_{n+1}=2)$, $P(X_{n+1}=3)$ et $P(X_{n+1}=4)$.

2. Montrer que les relations précédentes peuvent s'écrire sous la forme $\pi_{n+1} = (1-p)\pi_n A + \frac{p}{4}B$ où A est une matrice carrée et B une matrice ligne, à déterminer.

3. On pose $C = \frac{p}{4}B$. Déterminer la matrice π telle que $\pi = (1-p)\pi A + C$.

4. On pose $V_n = \pi_n - \pi$.

a. Vérifier que $V_{n+1} = (1-p)V_n A$.

En déduire que $V_n = (1-p)^n V_0 A^n$.

b. À la calculatrice, calculer les premières puissances de A.

Quelle conjecture peut-on faire sur les coefficients de A^n ?

c. Démontrer la conjecture précédente par récurrence.

d. En déduire la limite de la suite π_n.

4. On suppose que l'internaute est sur la page 1 et que $p = 0,25$.

Classer les pages par pertinence décroissante.

Exercice 2 Graphe de Heawood

On appellera $\mathcal{H}$ le graphe simple non orienté de la Figure 1, dont `H` est la matrice d'adjacence, disponible dans le fichier `DMlin.py`, ainsi que dans l'annexe 2.

Partie I — Un graphe régulier

I.1. Étant donné un entier $k \geqslant 2$, on dit qu'un graphe simple (c'est-à-dire sans boucle et sans arête multiple) est **k-régulier** si chaque sommet du graphe est de degré k.

a. Décrire, sans argumenter, les graphes connexes 1-réguliers, les graphes connexes 2-réguliers.

b. Donner une relation simple entre le nombre de sommets et le nombre d'arêtes d'un graphe k-régulier.

En déduire que tout graphe 3-régulier possède un nombre pair de sommets.

c. Vérifier à partir de la Figure 1, que le graphe $\mathcal{H}$ est 3-régulier. Quel est le nombre de sommets, d'arêtes de $\mathcal{H}$? Justifier soigneusement votre dénombrement.

I.2. Soient $k \geqslant 3$ et $n \geqslant 1$ des entiers naturels. On considère un graphe $\mathcal{G}$ simple d'ordre n, on note $\mathtt{G}$ sa matrice d'adjacence. On note $\mathtt{S}$ la matrice colonne d'ordre n dont tous les coefficients valent 1.

a. Montrer que le graphe $\mathcal{G}$ est k-régulier si et seulement si $\mathtt{S}$ est un vecteur propre de $\mathtt{G}$ pour la valeur propre k.

b. Montrer que le graphe $\mathcal{G}$ est k-régulier si et seulement si tous les coefficients diagonaux de $\mathtt{G}^2$ sont égaux à k.

c. (⌨) Calculer $\mathtt{H}^2$ en utilisant WIMS. Confronter avec le résultat de la question **I.1.c**.

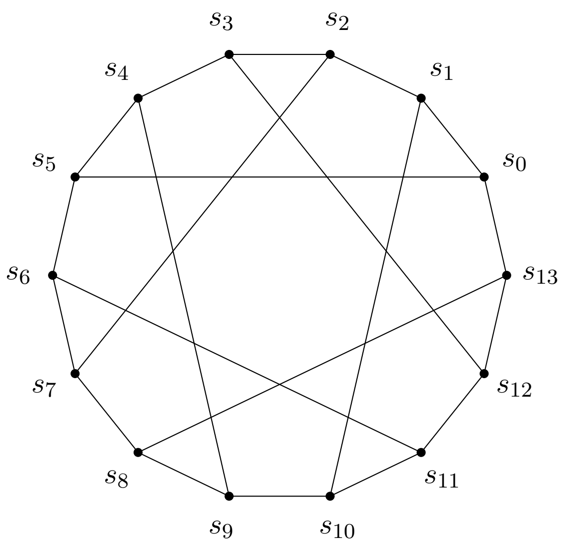


Figure 1. Le graphe $\mathcal{H}$.

Partie II — Cycles élémentaires

On appelle **cycle élémentaire** de longueur $\ell \geqslant 3$ d'un graphe simple, toute suite de ℓ sommets distincts $s_1, \ldots, s_\ell$ telle que, en posant $s_0 = s_\ell$, il existe une arête joignant s_{i-1} à s_i pour tout $i \in [\![1, \ell]\!]$, avec la convention que les suites $s_2, \ldots, s_\ell, s_1$ et $s_\ell, \ldots, s_1$ définissent le même cycle élémentaire.

II.1. **a.** Selon vous, pourquoi la définition de cycle élémentaire impose-t-elle la condition $\ell \geqslant 3$?

b. Soit $\mathcal{G} = (\mathrm{S}, \mathrm{A})$ un graphe simple d'ordre n et $\mathtt{G}$ sa matrice d'adjacence. Montrer que le graphe $\mathcal{G}$ possède un cycle de longueur 3 si et seulement si il existe un couple $(s, s') \in \mathrm{S}^2$ tel que les coefficients d'indices (s, s') de $\mathtt{G}$ et $\mathtt{G}^2$ sont tous les deux non nuls.

c. Proposer, en la justifiant, une méthode pour déterminer si le graphe $\mathcal{G}$ possède un cycle de longueur 4 par simple lecture de la matrice $\mathtt{G}^2$.

d. En utilisant $\mathtt{H}$ et $\mathtt{H}^2$, déterminer si le graphe $\mathcal{H}$ possède un cycle de longueur de longueur 3 ou 4.

II.2. Pour tout entier naturel non nul n, on note $\mathtt{I}_n$ la matrice identité d'ordre n.

a. Montrer que si le graphe $\mathcal{G}$ est 3-régulier et sans cycle de longueur 4, alors la matrice $\mathtt{G}^2 - 3\mathtt{I}_n$ est la matrice d'adjacence d'un graphe 6-régulier.

b. Tracer une représentation graphique de ce graphe 6-régulier dans le cas du graphe $\mathcal{H}$. Décrire ses composantes connexes.

c. En déduire qu'entre deux sommets distincts de $\mathcal{H}$ dont les indices ont même parité, il existe une et une seule chaîne de longueur 2.

d. Déterminer le diamètre de $\mathcal{H}$, c'est-à-dire la plus grande distance possible entre deux de ses sommets.

e. Donner la liste complète des cycles élémentaires de longueur 6 passant par s_0 et s_7.

II.3. **a.** En s'aidant des résultats de la question **II.2.b**, donner deux vecteurs colonnes $\mathtt{S}_0$ et $\mathtt{S}_1$, différents de $\mathtt{S}$, dont les coefficients appartiennent à $\{0, 1\}$ et qui soient vecteurs propres de $\mathtt{H}^2 - 3\mathtt{I}_n$ pour la valeur propre 6.

b. (⌨) Vérifier que les produits ${}^t\mathtt{S}_0\mathtt{H}\mathtt{S}_0$ et ${}^t\mathtt{S}_1\mathtt{H}\mathtt{S}_1$ sont nuls. Interpréter cette annulation en termes de graphes.

c. Montrer que pour tout entier naturel m, les produits ${}^t\mathtt{S}_0\mathtt{H}^{2m+1}\mathtt{S}_0$ et ${}^t\mathtt{S}_1\mathtt{H}^{2m+1}\mathtt{S}_1$ sont nuls.

En déduire que le graphe $\mathcal{H}$ n'admet pas de cycle élémentaire de longueur impaire.

Partie III — Le spectre

III.1. Soit n un entier naturel non nul. On désigne par f l'application linéaire de $\mathbb{R}^{2n}$ dans $\mathbb{R}^{2n}$ dont la matrice dans la base canonique est la matrice dont les coefficients d'indice (i, j) vaut 1 si i et j sont de même parité, et 0 sinon.

a. Déterminer l'image de f, en donner une base (on pourra utiliser les vecteurs $\mathtt{S}_0$ et $\mathtt{S}_1$ de la question 5). Donner la dimension du noyau de f.

b. Montrer que $\operatorname{Im} f$ est l'espace propre de f associé à la valeur propre n.

c. Montrer que $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$ sont des sous-espaces supplémentaires de $\mathbf{R}^{2n}$.

d. Montrer que le polynôme minimal de f est $X^2 - nX$.

III.2. On admet pour cette question que $\mathtt{H}^2 - 2\mathtt{I}_{14}$ annule le polynôme $X^2 - 7X$.

a. Montrer que $\mathtt{H}$ annule $(X^2 - 9)(X^2 - 2)$. En considérant le coefficient d'indice (s_0, s_7), montrer que $\mathtt{H}$ n'annule aucun polynôme de degré 3. Montrer que $\mathtt{H}$ n'annule aucun polynôme de degré 2.

b. En déduire le spectre de $\mathtt{H}$.

III.3. (Facultatif) Montrer que $\mathtt{H}^2 - 2\mathtt{I}_{14}$ annule le polynôme $X^2 - 7X$. Indication : on pourra utiliser le résultat de la question **II.2.b** et noter que $\mathtt{H}^2 - 2\mathtt{I}_{14} = \mathtt{H}^2 - 3\mathtt{I}_{14} + \mathtt{I}_{14}$.

Partie IV — Un graphe très symétrique

Étant donné $\mathcal{G} = (\mathrm{S}, \mathrm{A})$ un graphe fini et σ une permutation de S, on dit que σ est un automorphisme de $\mathcal{G}$ si pour tous s, s', $(\sigma(s), \sigma(s')) \in \mathrm{A} \iff (s, s') \in \mathrm{A}$.

IV.1. (Facultatif) Montrer que si σ est un automorphisme de $\mathcal{G}$, alors les espaces propres de $\mathtt{G}$ sont stables par l'endomorphisme associé à $\mathtt{P}_\sigma$.

IV.2. (Facultatif) (⌨) On donne les permutations[1]

$$\gamma = (s_0 s_2 s_4 s_6 s_8 s_{10} s_{12})(s_1 s_3 s_5 s_7 s_9 s_{11} s_{13})$$
$$\rho = (s_0 s_6 s_8)(s_2 s_{12} s_{10})(s_1 s_7 s_9)(s_3 s_5 s_{13})$$
$$\lambda = (s_3 s_4)(s_2 s_5)(s_1 s_6)(s_0 s_7)(s_8 s_{13})(s_9 s_{12})(s_{10} s_{11}).$$

Les matrices de permutation associées sont données dans le fichier compagnon `DMlin.py`.

Proposer une procédure à l'aide d'un calcul matriciel impliquant $\mathtt{H}$ et les matrices de permutation $\mathtt{P}_\gamma$, $\mathtt{P}_\rho$ et $\mathtt{P}_\lambda$ permettant de vérifier que γ, ρ et λ sont des automorphismes de $\mathcal{H}$.

IV.3. (Facultatif) Interpréter graphiquement sur la Figure 1 le résultat de la question **IV.2** pour γ et λ.

1. [Après correction des copies] L'énoncé était fautif pour ρ. On devait prendre par exemple $\rho = (s_0 s_6 s_2)(s_4 s_8 s_{10})(s_1 s_5 s_7)(s_3 s_{13} s_{11})$. Cela n'a pas porté préjudice ; voir la section commentaire.

Annexe 1 : programmes des élèves

Consigne. On souhaite étudier la vitese de convergence de la suite π_n vers $\pi = (p_1; p_2; p_3; p_4)$ établie à la question 4, en fonction de p. Pour tout $n \geqslant 0$, on note $\pi_n = (p_1(n); p_2(n); p_3(n); p_4(n))$ Ecrivez une fonction `convergence(p, delta)` qui renvoie le temps nécessaire pour que

$$\sum_{i=1}^{4} |p_i(n+1) - p_i(n)|^2 < \delta^2.$$

Votre fonction devra aussi renvoyer une estimation de la probabilité invariante. Vous testerez vos résultats à l'aide de l'instruction

```
for p in (0,0.1,0.2,0.3,0.4,0.5,0.6,0.7,0.8,0.9,1):
    print(p, convergence(p, .01))
```

Programme de l'élève A. L'élève A a produit le programe suivant.

```
def convergence(p, delta):
    p1, p2, p3, p4 = 0.25, 0.25, 0.25, 0.25
    n = 1
    q1 = p*0.25 + (1-p)/3*p2 + (1-p)/2*p3
    q2 = p*0.25 + (1-p)/2*p1 + (1-p)/2*p3
    q3 = p*0.25 + (1-p)/2*p1 + (1-p)/3*p2
    q4 = p*0.25 + (1-p)/3*p2
    while abs(p1-q1)+abs(q2-p2)+abs(q3-p3)+abs(q4-p4)>
        delta:
        q1 = p*0.25 + (1-p)/3*p2 + (1-p)/2*p3
        q2 = p*0.25 + (1-p)/2*p1 + (1-p)/2*p3
        q3 = p*0.25 + (1-p)/2*p1 + (1-p)/3*p2
        q4 = p*0.25 + (1-p)/3*p2
        n = n+1
    return n, (q1, q2, q3, q4)
```

Programme de l'élève B. L'élève B a produit le programe suivant.

```
def convergence(p, delta):
    p1, p2, p3, p4 = 0.25, 0.25, 0.25, 0.25
    n = 0
    d1,d2,d3,d4 = 1,1,1,1
    while d1+d2+d3+d4 > delta:
        n=n+1
        q1 = p/4 + (1-p)/3*p2 + (1-p)/2*p3
        q2 = p/4 + (1-p)/2*p1 + (1-p)/2*p3
        q3 = p/4 + (1-p)/2*p1 + (1-p)/3*p2
        q4 = p/4 + (1-p)/3*p2 + (1-p)*p4
        d1,d2,d3,d4 = p1-q1,p2-q2,p3-q3,p4-q4
        p1,p2,p3,p4=q1,q2,q3,q4
    return n, q1, q2, q3, q4
```

Programme de l'élève C. L'élève C a produit le programme suivant (comportant deux fonctions)

```
def distribPR(n,p):
  p1,p2,p3,p4 = 0.25,0.25,0.25,0.25
  for k in range(n):
    p1 = p*0.25+(1-p)/3*p2+(1-p)/2*p3
    p2 = p*0.25+(1-p)/2*p1+(1-p)/2*p3
    p3 = p*0.25+(1-p)/2*p1+(1-p)/3*p2
    p4 = p*0.25 +(1-p)/3*p2 +0.75*(1-p)*p4
  return p1,p2,p3,p4

def convergence(p,delta):
    for m in range (100):
      p1,p2,p3,p4 = distribPR(m,p)
      q1,q2,q3,q4 = distribPR(m+1,p)
      if (p1-q1)*(p1-q1)+(p2-q2)*(p2-q2)+(p3-q3)*(p3-q3)
          +(p4-q4)*(p4-q4) < delta*delta:
        return m,q1,q2,q3,q4
        break
```

Annexe 2 : Les matrices de l'exercice 2

$$\mathtt{H} = \begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}$$

$$\mathtt{P}_\gamma = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

$$\mathtt{P}_\rho = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

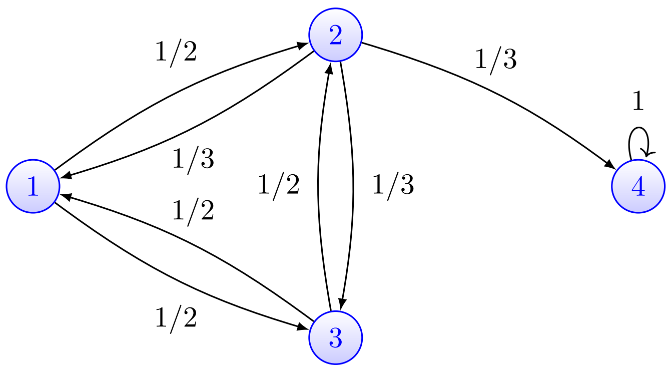
$$\mathtt{P}_\lambda = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

Solution de l'exercice 1

(A) 1. a. Introduisons la variable aléatoire S_n qui vaut i ou 0 selon que l'internaute fait un saut aléatoire au temps n vers la page $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, ou ne fait pas de saut aléatoire. D'après la formule des probabilités totales appliquée deux fois,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X_{n+1} = 1) &= \sum_{i=1}^{4} \mathbf{P}(X_1 = 1 \mid X_0 = i)\mathbf{P}(X_0 = i) \\
&= \mathbf{P}(\mathrm{S}_n = 1) \sum_{i=1}^{4} \mathbf{P}(X_0 = i) + \mathbf{P}(\mathrm{S}_n = 0) \sum_{i=1}^{4} q_{i,1}\mathbf{P}(X_0 = i) \\
&= \frac{p}{4} + (1-p) \sum_{i=1}^{4} q_{i,1}\mathbf{P}(X_0 = i),
\end{aligned}$$

où les $q_{i,j}$ sont les poids des transitions du graphe suivant.



b. De même,

$$\mathbf{P}(X_{n+1} = 2) = (1-p)\left(\frac{1}{2}\mathbf{P}(X_n = 1) + \frac{1}{2}\mathbf{P}(X_n = 3)\right) + \frac{p}{4}$$

$$\mathbf{P}(X_{n+1} = 3) = (1-p)\left(\frac{1}{2}\mathbf{P}(X_n = 1) + \frac{1}{3}\mathbf{P}(X_n = 2)\right) + \frac{p}{4}$$

$$\mathbf{P}(X_{n+1} = 4) = (1-p)\left(\frac{1}{3}\mathbf{P}(X_n = 2) + \mathbf{P}(X_n = 4)\right) + \frac{p}{4}.$$

2. On vérifie que les relations précédentes sont de la forme

$$\pi_{n+1} = (1-p)\pi_n A + \frac{p}{4}B$$

avec $B = (1; 1; 1; 1)$ et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Là on nous demande de déterminer la probabilité stationnaire de $(1-p)A + pA'$ (dont l'existence est admise). Posons $\pi = (p_1; p_2; p_3; p_4)$. Cela revient à résoudre le système

$$\begin{cases} p_1 &= (1-p)\left(\frac{p_2}{3} + \frac{p_3}{2}\right) + \frac{p}{4} \\ p_2 &= (1-p)\left(\frac{p_1}{2} + \frac{p_3}{2}\right) + \frac{p}{4} \\ p_3 &= (1-p)\left(\frac{p_1}{2} + \frac{p_2}{3}\right) + \frac{p}{4} \\ p_4 &= (1-p)\left(\frac{p_2}{3} + p_4\right) + \frac{p}{4}. \end{cases}$$

Distinguons les cas.

— Si $p \neq 0$ la dernière ligne se réécrit

$$p_4 + (p-1)p_4 = \frac{1-p}{2}p_2 + \frac{p}{4}$$

ce qui permet d'exprimer p_4 en fonction de p_2 :

$$p_4 = \frac{1-p}{2p}p_2 + \frac{1}{4} \tag{1}$$

tandis que les deux premières lignes se réécrivent

$$\begin{cases} p_1 - p_2 &= (1-p)\left(\frac{p_2}{3} - \frac{p_1}{2}\right) \\ p_2 - p_3 &= (1-p)\left(\frac{p_3}{2} - \frac{p_2}{3}\right) \end{cases}$$

d'où l'on tire la relation

$$p_1\left(1 + \frac{1-p}{2}\right) = p_2\left(1 + \frac{1-p}{3}\right) = p_3\left(1 + \frac{1-p}{2}\right). \tag{2}$$

On en déduit que $p_1 = p_3$ (ce qu'on pouvait aussi observer grâce au graphe) et il reste à déterminer p_1 et p_2. Ceci se fait par exemple en retraduisant

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$$

sous la forme $2p_1+(1+(1-p)/2p)p_2+1/4 = 1$ à l'aide de $p_1 = p3$ et de (1). Il en ressort que

$$\begin{array}{ll} p_1 = \frac{p^2-4p}{2(2p^2-7p-1)} & p_2 = \frac{3(p^2-3p)}{4(2p^2-7p-1)} \\ p_3 = \frac{p^2-4p}{2(2p^2-7p-1)} & p_4 = \frac{p^2-3p-4}{4(2p^2-7p-1)}. \end{array}$$

— Sinon $p = 0$, alors la 4e ligne donne $p_4 = p_4 + \frac{p_2}{3}$, d'où $p_2 = 0$, mais alors, la deuxième ligne donne aussi $p_1 = p_3 = 0$, et la probabilité stationnaire est

$$\pi = (0; 0; 0; 1) \quad (p = 0)$$

(Interprétation : sans la possibilité de sauter au hasard, la page 4 se comporte comme un puits dont on ne sort pas.)

4. a. Par définition de V_n, pour tout $n \geqslant 0$

$$\begin{aligned} V_{n+1} = \pi_{n+1} - \pi &= (1-p)\pi_n A + C \\ &= (1-p)\pi A + C + (1-p)(\pi_n - \pi)A \\ &= V_n + (1-p)V_n A. \end{aligned}$$

Par récurrence sur $n \geqslant 0$, $V_n = (1-p)^n V_0 A^n$.

b. Le calcul donne

$$A^2 = \begin{pmatrix} \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & \frac{5}{12} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0,42 & 0,25 & 0,17 & 0,17 \\ 0,17 & 0,33 & 0,17 & 0,33 \\ 0,17 & 0,25 & 0,42 & 0,17 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

puis

$$A^3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{7}{24} & \frac{7}{24} & \frac{1}{4} \\ \frac{7}{36} & \frac{1}{6} & \frac{7}{36} & \frac{4}{9} \\ \frac{7}{24} & \frac{7}{24} & \frac{1}{6} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0,17 & 0,29 & 0,29 & 0,25 \\ 0,19 & 0,17 & 0,19 & 0,44 \\ 0,29 & 0,29 & 0,17 & 0,25 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$A^4 = \begin{pmatrix} \frac{35}{144} & \frac{11}{48} & \frac{13}{72} & \frac{25}{72} \\ \frac{11}{72} & \frac{7}{36} & \frac{11}{72} & \frac{1}{2} \\ \frac{13}{72} & \frac{11}{48} & \frac{35}{44} & \frac{25}{72} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0,24 & 0,23 & 0,18 & 0,35 \\ 0,15 & 0,19 & 0,15 & 0,50 \\ 0,18 & 0,23 & 0,24 & 0,35 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On conjecture [2] que

$$\lim_{n\to+\infty} A^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

c. Exceptionnellement, donnons une rédaction un peu au-delà des attendus de Terminale pour gagner du temps. Un calcul donne que le spectre de A est

$$\left\{1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{12}(3 \pm \sqrt{57})\right\} \simeq \{1, -0.5, 0.879, -0.379\}.$$

Les valeurs propres sont simples et celles différentes de 1 sont toutes de valeur absolue strictement plus petite ; donc A est diagonalisable et A^n converge vers la matrice représentant le projecteur sur l'espace propre associé à 1.

d. On peut en déduire que π_n converge vers π.

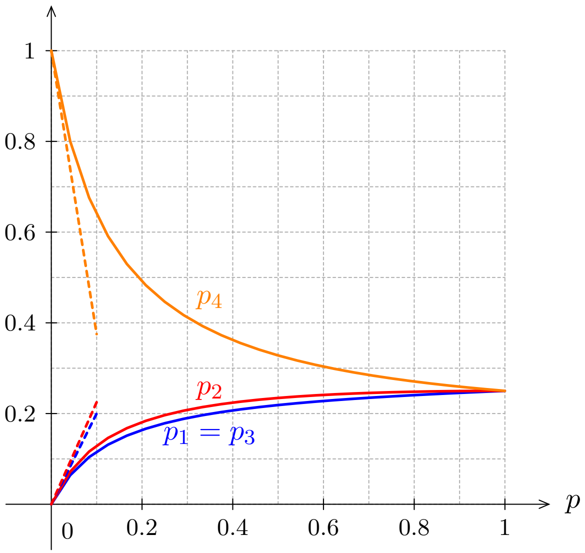
5. D'après l'expression trouvée à la question A3, on a que $\pi = (p_1, \ldots, p_4)$ avec

$$\begin{cases} p_1 &= \frac{5}{28} \simeq 0,18 \\ p_2 &= \frac{11}{56} \simeq 0,20 \\ p_3 &= \frac{5}{28} \simeq 0,18 \\ p_4 &= \frac{25}{56} \simeq 0,45 \end{cases}$$

La page 4 est la plus pertinente, suivie de la page 2, puis (à égalité) les pages 1 et 3.

(B) Sur le graphe suivant nous avons tracé $p_1, \ldots, p_4$ en fonction de p. Il en ressort que quand p est proche de 1, la position de l'internaute est une variable aléaatoire presque uniforme ; c'est parce que sa position au temps précédent importe peu. Quand $p = 0$ au contraire, l'internaute se retrouve au bout d'un certain temps piégée sur l'état 4 qui n'a pas de transition vers d'autre page.

2. D'autres conjectures sont possibles. Toutes celles qui sont utiles en vue de 4d. sont valables. On pouvait conjecturer que A^n a les sommes des coefficients de chacune de ses lignes égales à 1, ou encore que A^n a tous ses coefficients dans $[0, 1)$ sauf celui de position $(4, 4)$ qui est égal à 1.



(C) L'élève A a oublié la transition de l'état 4 vers lui-même. Il est vraisemblable que cet oubli est dû à une traduction trop littérale du graphe de l'énoncé, sur laquelle elle n'est pas figurée. D'autre part, la condition d'arrêt est

$$\sum_{i=1}^{4} |p_i(n+1) - p_i(n)| < \delta,$$

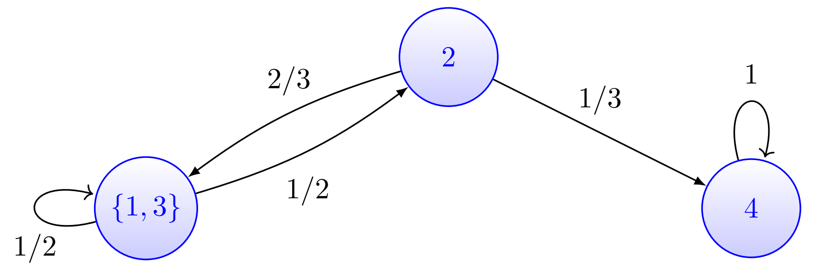
qui a une différence mineure avec celle demandée. Pour faire constater son erreur à l'élève 1, on peut lui demander d'executer une routine vérifiant que les composantes de sa probabilité stationnaire somment bien à 1.

L'élève B a un programme a priori plus efficace, cependant la condition d'arrêt est mal écrite (ligne 5) ; de sorte que le programme va s'arrêter après une seule itération, ce qui n'est pas le coprtement attendu. Normalement cette erreur est facilement corrigée après une execution où on la constate.

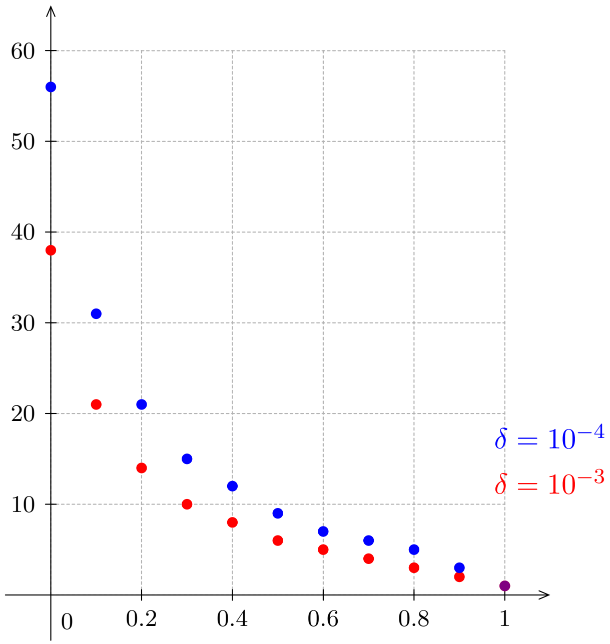
Le programme de l'élève C comporte plusieurs problèmes, le premier étant l'affectation successive de p1 à p4 deslignes 4 à 7. De plus, l'usage de la boucle for à la ligne 11 et sont interruption sont évitables avec les méthodes des autres élèves. Les calculs des lignes 12 et 13 sont redondants. Il est plus difficile de corriger ces erreurs. En revanche la condition d'arrêt est correcte.

Compléments. Quitte a reprendre les notations de l'exercice, on peut noter que $\frac{p}{4}B = \pi_n p A'$; où A' est la matrice carrée pleine de 1/4, de sorte que la relation obtenue en (A) peut se réécrire sous la forme $\pi_{n+1} = \pi_n((1-p)A + pA')$ où $(1-p)A + pA'$ est une matrice stochastique, combinaison barycentrique de A et de A'.

Le problème est légèrement hors-programme de Terminale math expertes, puisque la chaîne de Markov possède 4 états. Notons néanmoins que puisque les pages 1 et 3 ont exactement le même rôle, toute l'information est déjà contenue dans le graphe de transitions suivant.



Cette chaîne de Markov est théoriquement dans le cadre du programme. Voici le temps de convergence obtenue, suivant que le seuil est fixé à $\delta = 10^{-3}$ ou $\delta = 10^{-4}$.



La convergence vers la probabilité d'équilibre se fait à vitesse exponentielle. On doit s'attendre à ce que le temps de convergence obtenu (à p fixé) soit proportionnel à $-\log \delta$.

Notons que la boucle `for` utilisée par l'élève C comptait 100 itérations. En pratique ce n'est pas un problème si δ est plus grand que 10^{-4}.

Solution de l'exercice 2

Partie I

I.1. **a.** L'unique graphe connexe 1-régulier est le graphe constitué de deux sommets et une arête : •—•.
Les graphes 2-réguliers sont les graphes cycliques d'ordre n, pour $n \geqslant 3$, que l'on trouvera dessinés sur la figure 2 pour $3 \leqslant n \leqslant 6$.

Algorithme 1 Temps de convergence

Entrée: $p \in [0,1]$ et $\delta > 0$
Sortie: Un entier naturel et une distribution de probabilité

$(p_{13}; p_2; p_4) \leftarrow (0.5; 0,25; 0,25)$ **et** $d \leftarrow 1$ **et** $n \leftarrow 0$
tant que $d > \delta^2$ **faire**
    $(q_{13}; q_2; q_4) \leftarrow \left(\frac{p}{4} + \frac{1-p}{3}p_2 + \frac{1-p}{2}p_{13}; \frac{p}{4} + \frac{1-p}{2}p_{13}; \frac{p}{4} + \frac{1-p}{3}p_2 + (1-p)p_4\right)$
    $d \leftarrow (p_{13} - q_{13})^2 + (p_2 - q_2)^2 + (p_4 - q_4)^2$
    $(p_{13}; p_2; p_4) \leftarrow (q_{13}; q_2; q_4)$
    $n \leftarrow n + 1$
fin tant que
    retourner n **et** $(\frac{p_{13}}{2}; p_2; \frac{p_{13}}{2}; p_4)$

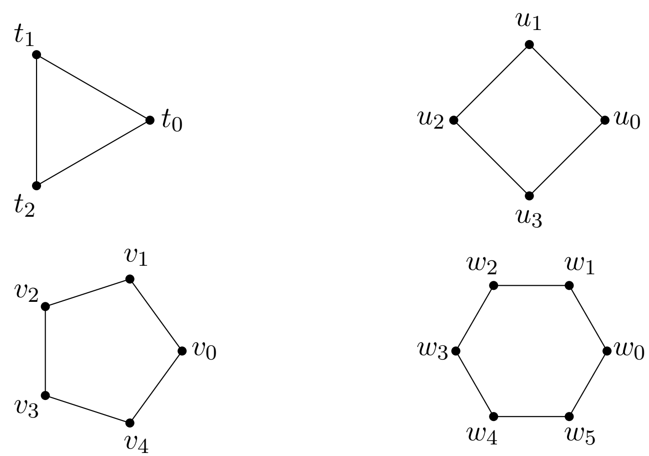


FIGURE 2. Graphes 2-réguliers d'ordre n, $3 \leqslant n \leqslant 6$.

b. D'après le lemme des poignées de mains, le nombre d'arêtes d'un graphe k-régulier d'ordre n est $\frac{kn}{2}$. En particulier, étant donné un graphe 3-régulier d'ordre n, 2 divise $3n$, et puisque 2 est premier à 3, 2 divise n d'après le lemme de Gauss.

c. Les sommets de $\mathcal{H}$ sont numérotés de s_0 à s_{13}, il y en a donc 14. Étant donné que $\mathcal{H}$ est 3-régulier, le nombre d'arrêtes est $3 \times 14/2 = 21$.

I.2. **a.** Appelons S l'ensemble des sommets de $\mathcal{G}$ et $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{S} \times \mathrm{S}$ l'ensemble de ses arêtes. Matriciellement, si l'on écrit $\mathtt{G} = (g_{st})_{s,t \in \mathrm{S}}$, alors pour tout $t \in \mathrm{S}$, le coefficient d'indice t dans $\mathtt{GS}$ est égal à

$$\sum_{s \in \mathrm{S}} g_{st} = \sum_{s : \{s,t\} \in \mathrm{A}} 1 = \sharp\{s \in \mathrm{S} : \{s,t\} \in \mathrm{A}\} = k,$$

où l'on a utilisé que $\mathcal{G}$ est k-régulier pour la dernière égalité. Donc $\mathtt{GS} = 3\mathtt{S}$. Réciproquement, si $\mathtt{GS} = 3\mathrm{S}$, alors pour tout $t \in \mathrm{S}$, $\sharp\{s \in \mathrm{S} : \{s,t\} \in \mathrm{A}\} = k$. Autrement dit, q$\mathcal{G}$ est k-régulier.

b. Pour tout $s \in \mathrm{S}$, le coefficient diagonal d'indice (s,s) de $\mathtt{G}^2$ représente le nombres de chaînes de longueur 2 de $\mathcal{G}$ avec départ et arrivée sur un même sommet $s \in \mathrm{S}$. Étant donné que $\mathcal{G}$ est supposé simple, ce nombre est exactement le nombre d'arêtes incidentes à s. Tous les coefficients diagonaux sont égaux à k si et seulement si $\mathcal{G}$ est k-régulier.

c. Le calcul donne

$$\mathtt{H}^2 = \begin{pmatrix}
\mathbf{3} & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & \mathbf{3} & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 0 & \mathbf{3} & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & \mathbf{3} & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 0 & \mathbf{3} & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \mathbf{3} & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \mathbf{3} & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \mathbf{3} & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \mathbf{3} & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \mathbf{3} & 0 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \mathbf{3} & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \mathbf{3} & 0 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \mathbf{3} & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \mathbf{3}
\end{pmatrix}.$$

Tous les coefficients diagonaux de $\mathtt{H}^2$ sont égaux à 3, $\mathcal{H}$ et 3-régulier.

Partie II

II.1. **a.** Rappelons que les graphes considérés dans cet exercices sont simples et sans arêtes multiples. La condition $\ell \geqslant 3$ apparaît car

— Si $\ell = 1$, on est en présence d'une boucle dans le graphe $\mathcal{G}$.
— Si $\ell = 2$, on est en présence d'une arête multiple.

b. S'il existe un couple $(s, s') \in \mathrm{S}^2$ tel que les coefficients d'indices (s, s') sont tous les deux non nuls, alors il existe un chemin de longueur 2 et un chemin de longueur 1 de s vers s'. En concaténant ces chemins, on trouve un cycle élémentaire de longueur 3.

c. Il s'agit de voir si $\mathtt{G}^2$ possède un coefficient non diagonal supérieur ou égal à 2.

d. On a vu à la question **I.2.c** que es coefficients non diagonaux de $\mathtt{H}^2$ sont inférieurs à 1, donc $\mathcal{H}$ n'a pas de cycle de longueur 4. Concernant les cycles de longueur 3, un calcul assisté par WIMS donne

$$\mathtt{H}^2 - \mathtt{H} = \begin{pmatrix}
3 & -1 & 1 & 0 & \ddots & 1 & -1 \\
-1 & 3 & -1 & 1 & \ddots & 0 & 1 \\
1 & -1 & 3 & -1 & \ddots & 1 & 0 \\
0 & 1 & -1 & 3 & \ddots & -1 & 1 \\
1 & 0 & 1 & -1 & \ddots & 1 & 0 \\
-1 & 1 & 0 & 1 & \ddots & 0 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 0 & \ddots & 1 & 0 \\
0 & 1 & -1 & 1 & \ddots & 0 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 0 & \ddots & 1 & -1 \\
0 & 1 & 0 & 1 & \ddots & 0 & 1 \\
1 & -1 & 1 & 0 & \ddots & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & \ddots & -1 & 1 \\
1 & 0 & 1 & -1 & \ddots & 3 & -1 \\
-1 & 1 & 0 & 1 & \ddots & -1 & 3
\end{pmatrix}$$

les coefficients nuls dans cette matrice sont d'indices (s_i, s_j) avec
— Ou bien, $i - j \in \{3, 7, 11\}$ modulo 14,
— Ou bien, $i - j = 9$ modulo 14 et i est impair

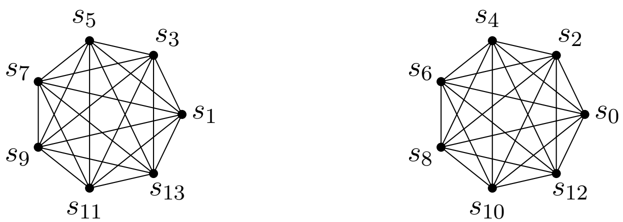
— Ou bien, $i - j = 5$ modulo 14 et i est pair
Or ces coefficients sont déjà nuls sur la matrice $\mathtt{H}$.

II.2. **a.** Soit $\mathcal{G}$ un graphe 3 régulier sans cycle de longueur 4, et $\mathtt{G}$ sa matrice d'adjacence. $\mathtt{G}$ est une matrice symétrique positive, donc $\mathtt{G}^2$ aussi. D'après la question **I.2.b.** tous les coefficients diagonaux de $\mathtt{G}^2$ son égaux à 3. D'après la question **II.1.d**, tous les coefficients non diagonaux de $\mathtt{G}^2$ sont inférieurs ou égux à 1.
On en déduit que $\mathtt{G}^2 - 3\mathtt{I}_n$ est une matrice symétrique qui a tous ses coefficients dans $\{0, 1\}$. C'est donc la matrice d'adjacence d'un graphe d'ordre n, que l'on peut noter $\mathcal{G}'$. De plus, avec les notations de la question **I.2.a**,

$$(\mathtt{G}^2 - 3\mathtt{I}_n)\mathtt{S} = (3^2 - 3)\mathtt{S} = 6\mathtt{S},$$

donc $\mathcal{G}'$ est 6-régulier d'après la question **I.2.a**.

b. Dans le cas de $\mathcal{H}$, nous avons calculé que la matrice $\mathtt{H}^2 - 3\mathtt{I}_{14}$ possède les coefficients 1 en place (s_i, s_j) si $|i - j|$ est pair et au moins égal à 2, et 0 sinon. Le graphe $\mathcal{H}'$ est donc constitué de deux copies du graphe complet sur 7 sommets :

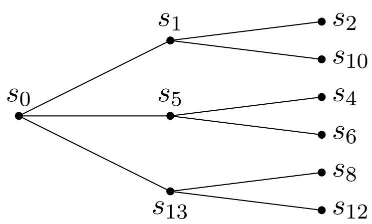


c. Les arêtes de $\mathcal{H}'$ représentent les chemins injectifs de longueur 2 dans $\mathcal{H}$. D'après la question **II.2.b** le graphe restreint au sommets de même parité est complet.

d. Soient $i, j \in \{0, \dots, 13\}$. Si i et j sont distincts et de même parité, la distance de s_i à s_j est 2 d'après la question **II.2.c**. Si i et j sont de parité distinctes, on peut supposer sans perte de généralité que i est pair et j est impair. Étant donné que $\mathcal{H}$ ne contient pas de cycle élémentaire de longueur 3, pour tout $i \in \{0, 1, \dots, 13\}$, si s_i est voisin de s_k alors k est impair ; puis, étant donné que j et k sont de même parité,

$$d(s_i, s_j) = d(s_i, s_k) + d(s_k, s_j) \leqslant 1 + 2 = 3.$$

Ceci prouve que le diamètre de $\mathcal{H}$ est au plus 3.

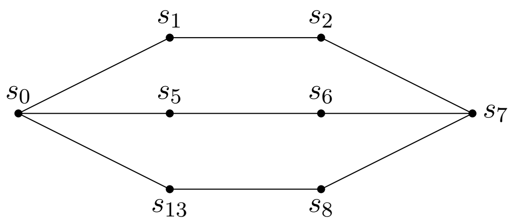


D'autre part, $\mathcal{H}$ étant 3-régulier le nombre de sommets à distance au plus 2 de s_0 est au plus $1+3+3\times 2 = 10 < 14$. Donc $\mathcal{H}$ est de diamètre 3 exactement.

e. Le calul de $\mathtt{H}^3$ à l'aide de WIMS donne

$$\mathtt{H}^3 = \begin{pmatrix}
0 & 5 & 0 & 3 & 0 & 5 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 5 \\
5 & 0 & 5 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 5 & 0 & 3 & 0 \\
0 & 5 & 0 & 5 & 0 & 3 & 0 & 5 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 3 \\
3 & 0 & 5 & 0 & 5 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 5 & 0 \\
0 & 3 & 0 & 5 & 0 & 5 & 0 & 3 & 0 & 5 & 0 & 3 & 0 & 3 \\
5 & 0 & 3 & 0 & 5 & 0 & 5 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 \\
0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 5 & 0 & 5 & 0 & 3 & 0 & 5 & 0 & 3 \\
\boxed{3} & 0 & 5 & 0 & 3 & 0 & 5 & 0 & 5 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 \\
0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 5 & 0 & 5 & 0 & 3 & 0 & 5 \\
3 & 0 & 3 & 0 & 5 & 0 & 3 & 0 & 5 & 0 & 5 & 0 & 3 & 0 \\
0 & 5 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 5 & 0 & 5 & 0 & 3 \\
3 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 5 & 0 & 3 & 0 & 5 & 0 & 5 & 0 \\
0 & 3 & 0 & 5 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 5 & 0 & 5 \\
5 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 5 & 0 & 3 & 0 & 5 & 0
\end{pmatrix}$$

Nous avons encadré le coefficient d'indice (s_0, s_7) ; il est égal à 3. Il existe donc 3 chemins de longueur 3 partant de s_0 et arrivant à s_7. Ces 3 chemins sont disjoints : si ce n'était pas le cas, l'ensemble des voisins de s_0 à distance 2 de s_7 serait de cardinal 2, ou bien l'ensemble des voisins de s_7 à distance 2 de s_0 serait de cardinal 2, ce qui ne peut pas être d'après la question **II.2.c**.



Les cycles élémentaires de longueur 6 passant par s_0 et s_7 sont donc, modulo permutation circulaire des sommets visités,

$$\begin{array}{ll}\mathfrak{S}_1 = \{s_0, s_1, s_2, s_7, s_6, s_5, s_0\} & \mathfrak{S}_2 = \{s_0, s_5, s_6, s_7, s_2, s_1, s_0\}\\ \mathfrak{S}_3 = \{s_0, s_5, s_6, s_7, s_8, s_{13}, s_0\} & \mathfrak{S}_4 = \{s_0, s_{13}, s_8, s_7, s_6, s_5, s_0\}\\ \mathfrak{S}_5 = \{s_0, s_1, s_2, s_7, s_8, s_{13}, s_0\} & \mathfrak{S}_6 = \{s_0, s_{13}, s_8, s_7, s_2, s_1, s_0\}.\end{array}$$

II.3. **a.** D'après la question **II.2.b**, le graphe 6-régulier $\mathcal{H}'$ possède deux composantes connexes qui sont des graphes complets et sont formées sur les sous-ensembles de sommets

$$\mathrm{S}_0 = \{s_0, s_2, s_4, s_6, s_8, s_{10}, s_{12}\}$$

et

$$\mathrm{S}_1 = \{s_1, s_3, s_5, s_7, s_9, s_{11}, s_{13}\}.$$

Il en résulte que les vecteurs colonne

$$\mathrm{S}_0 = {}^t(1; 0; 1; 0; 1; 0; 1; 0; 1; 0; 1; 0; 1; 0)$$

et

$$\mathrm{S}_1 = {}^t(0; 1; 0; 1; 0; 1; 0; 1; 0; 1; 0; 1; 0; 1)$$

sont des vecteurs propres de la matrice $\mathtt{H}^6 - 3\mathtt{I}_{14}$ pour la valeur propre 6.

b. On vérifie avec WIMS que ${}^t\mathtt{S}_i\mathtt{H}\mathtt{S}_i = 0$ pour $i \in \{0, 1\}$.
A tout U multi-ensemble de S, nous pouvons associer sa fonction caractéristique $\mathtt{U} \in \mathbf{R}^{\mathrm{S}}$. Alors pour tous $\mathrm{U}, \mathrm{V} \subseteq \mathrm{S}$,

$$\sharp(\mathrm{U} \cap \mathrm{V}) = {}^t\mathtt{U}\mathtt{V}.$$

L'identité ${}^t\mathtt{S}_0\mathtt{H}\mathtt{S}_0 = 0$ implique alors que tout sommet de $\mathcal{H}$ adjacent à un sommet dans S_0 (resp. à un sommet dans S_1) est dans $\mathrm{S} \setminus \mathrm{S}_0$ (resp. dans $\mathrm{S} \setminus \mathrm{S}_1$). Puisque $\mathcal{H}$ est 3-régulier, nous avons donc que

$$\begin{aligned}\mathtt{H}\mathtt{S}_0 &= 3\mathtt{S}_1\\ \mathtt{H}\mathtt{S}_1 &= 3\mathtt{S}_0.\end{aligned}$$

(On retrouve ainsi que $\mathtt{H}^2\mathtt{S}_i = 9\mathtt{S}_i$, ce qui découlait de **II.3.a**.) On peut en déduire que pour tout $m \geqslant 0$,

$$\begin{aligned}{}^t\mathtt{S}_0\mathtt{H}^{2m+1}\mathtt{S}_0 &= {}^t\mathtt{S}_0\mathtt{H}^m\mathtt{H}\mathtt{H}^m\mathtt{S}_0\\ &= {}^t(\mathtt{H}^m\mathtt{S}_0)\mathtt{H}(\mathtt{H}^m\mathtt{S}_0)\\ &= \begin{cases}3^{2m} \cdot {}^t(\mathtt{S}_1)\mathtt{H}\mathtt{S}_1 & m \equiv 1 \quad (2\mathbf{Z})\\ 3^{2m} \cdot {}^t(\mathtt{S}_0)\mathtt{H}\mathtt{S}_0 & m \equiv 0 \quad (2\mathbf{Z}),\end{cases}\end{aligned}$$

qui est nul d'après ce qui précède. Ceci signifie que $\mathcal{H}$ n'a aucun cycle élémentaire de longueur impaire $\geqslant 3$.

Partie III

III.1. **a.** Les colonnes de A de même parité sont égales, et ses deux premières colonnes sont linéairement indépendantes, donc $\mathrm{Im}(f)$ est engendré par l'image des deux premiers vecteurs de base, c'est-à-dire

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(f) &= \mathrm{Vect}\left({}^t(1; 0; 1; \ldots), {}^t(0; 1; 0; \ldots)\right)\\ &= \left\{{}^t(x; y; x; y; \ldots) : (x, y) \in \mathbf{R}^2\right\}\end{aligned}$$

D'après le théorème du rang, $\dim\ker(f) = n - 2$.

b. Soit $u \in \mathrm{Im}(f)$, que l'on écrit sous la forme ${}^t(x; y; x; y; \ldots)$ d'après la question **III.1.a**. Pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, on a

$$f(u)_i = \sum_{j=1}^{n} u_j \mathbf{1}_{2|i-j} = \begin{cases}nx & i \in 2\mathbf{Z}\\ ny & i \in 2\mathbf{Z} + 1.\end{cases}$$

Ceci prouve que $\mathrm{Im}(f) \subseteq \ker(f - n\,\mathrm{Id})$. De plus d'après la question précédente $\dim\ker f = n - 2$, donc $\dim\ker(f - n\,\mathrm{Id}) \leqslant n - (n - 2) = 2$. Nous avons donc que $\mathrm{Im}(f) = \ker(f - n\,\mathrm{Id})$.

c. **Première méthode.** Nous savons que $\dim\ker(f) + \dim\mathrm{Im}(f) = n$, donc il suffit de montrer que $\ker(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$. Or d'après la question **III.1.b**,

$$\ker(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \ker(f) \cap \ker(f - n\,\mathrm{Id}) = \{0\}.$$

Seconde méthode. La matrice représentant f dans la base canonique de $\mathbf{R}^{2n}$ est symétrique, donc f est autoadjoint pour le produit scalaire usuel. Il en résulte que pour tout $u \in \ker(f)$ et $v \in \mathbf{R}^{2n}$,

$$\langle u, fv\rangle = \langle fu, v\rangle = \langle 0, v\rangle = 0.$$

Donc $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont en somme directe orthogonale pour le produit scalaire usuel.

d. Étant donné que $\mathrm{Im}(f) \subseteq \ker(f - n\,\mathrm{Id})$, f annule $X^2 - nX$. Or $X^2 - nX = X(X - n)$ et X et $X - n$ sont irréductibles. Ni X, ni $X - n$ n'annulent f. Donc $X^2 - nX$ est le polynôme minimal de f. (Autre méthode : on a essentiellement montré que f est diagonalisable. Donc le polynôme minimal de f est le produit des $(X - \lambda)$ où λ parcourt l'ensemble des valeurs propres (sans multiplicité) de f.)

III.2. **a.** Calculons :

$$\begin{aligned}(X^2-2)^2 - 7(X^2-2) &= X^4 - 4X^2 + 4 - 7X^2 + 14\\ &= X^4 - 11X^2 + 18\\ &= (X^2-9)(X^2-2).\end{aligned}$$

Nous avons admis que $\mathtt{H}^2 - 2\mathtt{I}_{14}$ annule $X^2 - 7X$, ce qui signifie que $(\mathtt{H}^2 - 2\mathtt{I}_{14})^2 - 7(\mathtt{H}^2 - 2\mathtt{I}_{14}) = 0$, donc que $\mathtt{H}$ annule $(X^2 - 9)(X^2 - 2)$ d'après le calcul qui précède.

D'après la question **II.2.e** nous savons que le coefficient d'indice (s_0, s_7) dans $\mathtt{H}^3$ est égal à 3. D'autre part ce coefficient est nul dans $\mathtt{H}$ (car s_0 et s_7 ne sont pas voisins dans $\mathcal{H}$), dans $\mathtt{H}^2$ (car 0 et 7 n'ont pas la même parité), et dans $\mathtt{I}_{14}$ (car $2 \neq 7$). Donc aucun polynôme de degré 3 n'est annulé par $\mathtt{H}$. Le même raisonnement en considérant le coefficient d'indice (s_0, s_2) prouve qu'aucun polynôme de degré 2 n'annule $\mathtt{H}$.

b. D'après la question **III.2.a**, le polynôme minimal de $\mathtt{H}$ est $(X^2 - 9)(X^2 - 2$. Donc le spectre de $\mathtt{H}$ est

$$\mathrm{spectre}(\mathtt{H}) = \{-3; -\sqrt{2}; \sqrt{2}; 3\}.$$

III.3. D'après la question **II.2.d** l'endomorphisme associé à $\mathtt{H}^2 - 2\mathtt{I}_{14}$ est l'endomorphisme f de la question **III.1** avec $n = 7$. D'après la question **III.1.d**, $X^2 - 7X$ est annulé par $\mathtt{H}^2 - 2\mathtt{I}_{14}$.

Partie IV

IV.1. Soit σ un automorphisme de $\mathcal{G}$. Pour tout $s \in \mathrm{S}$, on note encore par abus s le vecteur de base de $\mathbf{R}^{\mathrm{S}}$ correspondant. Alors pour tout $(s, s') \in \mathrm{S}^2$, une vérification très formelle donne que

$$\begin{aligned}{}^t s\mathtt{P}_\sigma \mathtt{G} s' = {}^t s \mathtt{P}_\sigma \sum_{u\in\mathrm{S}:\{s',u\}\in\mathrm{A}} u &= \sum_{u\in\mathrm{S}:\{s',u\}\in\mathrm{A}} {}^t s\sigma(u)\\ &= \sum_{v\in\mathrm{S}:\{s',\sigma^{-1}(v)\}\in\mathrm{A}} {}^t sv\\ &= \sum_{w\in\mathrm{S}:\{\sigma(s'),w\}\in\mathrm{A}} {}^t sw\\ &= {}^t s\mathtt{G}\mathtt{P}_\sigma s',\end{aligned}$$

d'où l'on déduit que $\mathtt{P}_\sigma$ commute à $\mathtt{G}$, donc stabilise tous ses espaces propres.

IV.2. Il s'agit de vérifier que

$$\mathtt{P}_\gamma \mathtt{H} \mathtt{P}_\gamma^{-1} = \mathtt{P}_\lambda \mathtt{H} \mathtt{P}_\lambda^{-1} = \mathtt{P}_\rho \mathtt{H} \mathtt{P}_\rho^{-1} = \mathtt{H}.$$

IV.3. La représentation graphique de $\mathcal{H}$ est invariante par rotation d'angle $2\pi/7$, qui envoie le sommet s sur le sommet $\gamma(s)$ pour tout s. De même, la représentation graphique de $\mathcal{H}$ est invariante par la réflexion d'axe vertical, qui envoie le sommet s sur le sommet $\lambda(s)$ pour tout s. Ainsi, le fait que γ et λ soient des automorphismes du graphe se traduit par le fait qu'ils laissent invariante sa représentation graphique.

Compléments. On peut construire $\mathcal{H}$ de la façon suivante : $\mathbf{F}_2$ est le corps à deux éléments, S_0 et S_1 sont deux copies de $\mathbf{F}_2^3 \setminus 0$, et il y a une arête $(p, d) \in \mathrm{A}$ si et seulement si

$$p_1 d_1 + p_2 d_2 + p_3 d_3 = 0$$

est vérifiée. On peut alors montrer que le sous-groupe des automorphismes de $\mathcal{H}$ préservant les cliques S_i est $\mathrm{GL}(3, 2)$, de cardinal 168, qui se trouve être un groupe simple, le plus petit après le groupe alterné sur 5 lettres. Le groupe des automorphisme de $\mathcal{H}$ est de cardinal 336, engendré par ce sous-groupe et la réflexion verticale sur la figure 1. On pourra vérifier que ρ correspond à la permutation circulaire de la base canonique de $\mathbf{F}_2^3$ sur la figure 3, et λ à un échange des deux copies de $\mathbf{F}_2^3$. $\mathcal{H}$ possède de nombreuses propriétés remarquables, l'une d'entre elles étant d'avoir un très grand *trou spectral* comparé aux graphes de sa taille[3]. Ceci se manifeste par le fait qu'une chaîne de Markov telle que $\mathbf{P}(X_0 \in \mathrm{S}_0) = 1/2$ converge très vite vers la probabilité uniforme. Il est aussi très difficile de déconnecter $\mathcal{H}$ en deux morceaux de taille comparable en lui enlevant des arêtes. On dit que $\mathcal{H}$ est un bon expanseur.

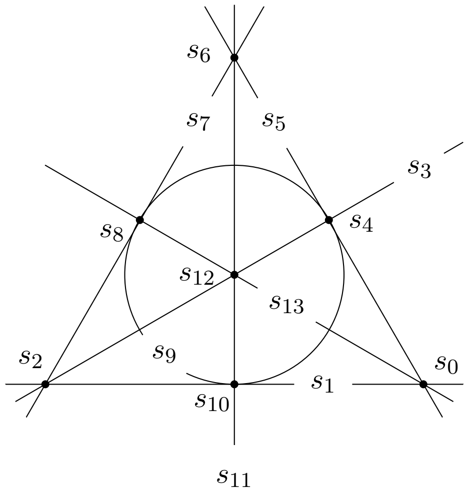


FIGURE 3. Les septs points de $\mathbf{F}_2^3 \setminus \{0\}$, et les sept lignes (représentées par six droites et un cercle) correspondant à des hyperplans privés de l'origine. Dans le graphe de Heawood $\mathcal{H}$, il y a une arête entre s_i et s_j si s_i et s_j forment une paire { point, ligne } d'objets incidents ci-dessus.

3. le trou spectral est la différence entre les deux plus grandes valeurs propres positives.

Barême

Exercice 1 : 20 points.

(A) 13 points pour la résolution de l'exercice, répartis de la façon suivante.

1. 3 points : 1.5 pour 1.a bien justifiée, 0.5 pour chacune des trois autres.
2. 2 points, dont 1 pour la détermination correcte de A et 0.5 pour la détermination correcte de B
3. 3 points : 1 pour avoir su exprimer la probabilité stationnaire à partir de A et B ou C, 2 pour résoudre effectivement le système linéaire.
4. 3.5 points : 1.5 point pour 4.a dont 1 pour la bonne écriture de la récurrence, 1 pour 4.b (0.5 pour la "conjecture"), 0.5 points pour 4.c, 0.5 points pour 4.d
4. (la deuxième question 4) : 1.5 point.

(B) 3 points (1 pour $p = 0$, 1 pour $p = 1$, 1 pour l'interprétation)

(C) 4 points : 1 point par erreur trouvée et convenablement justifiée, 1 points pour avoir écrit un programme correct et lisible, en Python ou en pseudo-code.

Exercice 2 : 30 points.
Partie I : 7 points.
Partie II : 12 points.
Partie III : 8 points dont 2 facultatifs.
Partie IV : 3 points facultatifs.

I. 1. a. 1 point : 0.5 pour le graphe 1-régulier, 0.5 pour les graphes 2-réguliers.

b. 2 points : 1 pour citer correctement le lemme des poignées de main, 1 pour la parité du nombre de sommets.

c. 1.5 points : 0.5 pour le nombre de sommets, 0.5 pour le nombre d'arêtes, 0.5 pour la justification à l'aide de la question précédente.

2. a. 1 point.

b. 1 point.

c. 0.5 points.

II. **1.** **a.** 0.5 points. Justification que $\ell \geqslant 3$.

b. 1.5 point pour la démonstration correcte.

c. 1 point : 0.5 pour l'énoncé du critère correct, 0.5 pour se justification.

d. 0.5 points pour la vérification sur $\mathtt{H}$.

2. **a.** 1.5 point : Démonstration correcte que $\mathtt{G}^2 - 3\mathtt{I}_n$ est la matrice d'adjacence d'un graphe 6 régulier.

b. 1 point : 0,5 pour le tracé du graphe (même si les composantes connexes ne sont pas identifiées), 0.5 pour l'identification des composantes connexes.

c. 1 point.

d. 1 point : 0.5 point pour la minoration, 0.5 points pour la majoration.

e. 1 point dont 0.5 pour bien justifier que la liste est complète.

3. **a.** 1 point.

b. 1 point (pour l'interprétation).

c. 1 point (0.5 pour la preuve, 0.5 pour le "En déduire").

III. **1.** **a.** 1.5 points : 0.5 pour l'image, 0.5 pour la base, 0.5 pour la dimension du noyau.

b. 0.5 points.

c. 0.5 points.

d. 1 point : 0.5 pour montrer qu'il annule, 0.5 pour la minimalité.

2. **a.** 1.5 points : 0.5 points pour montrer qu'il annule, 1 point pour la minimalité.

b. 1 point.

3. 2 points.

IV. **1.** 1 point.

2. 1 point.

3. 1 point (0.5 pour γ, 0.5 pour λ).

Commentaires

Exercice 1. De nombreuses copies ont fait l'erreur d'oublier la transition de la page 4 à elle-même (à l'instar de l'élève A). C'était dans une certaine mesure piégeux car cette transition n'est pas représentée graphiquement (l'énoncé est probablement perfectible à cet endroit). Il y avait cependant plusieurs manière de repérer cette erreur via ses conséquences, en particulier les probabilités trouvées ne sommaient pas à 1. À la question (A)3, il s'agissait de résoudre effectivement le système linéaire, ce que relativement peu de copies ont eu le courage d'entreprendre en intégralité.

A la question 4b, plusieurs conjectures de force variable étaient possibles. S'agissant d'un problème pour élèves de Terminale mathématiques expertes, la plus naturelle était peut être que les sommes des lignes de A^n sont 1 pour tout n, à démontrer en 4c par récurrence sans recours à la terminologie des éléments propres. J'ai accepté toutes les conjectures qui menaient au résultat recherché.

Dans la question (B), l'interprétation a été relativement peu abordée alors que correctement prise, elle ne présentait pas de grosse difficulté.

Plusieurs copies n'ont pas abordé la partie algorithmique alors même que la partie mathématique était bien traitée, ce qui est un peu dommage.

Bien que l'énoncé n'ait pas fait le choix de le mettre en avant, PageRank entre dans le formalisme des chaînes de Markov (voir à ce sujet le paragraphe de compléments à la fin de la correction). À la question (A)3, il était donc théoriquement possible de justifier au moins l'existence de la probabilité stationnaire par le théorème de Perron-Frobenius qui est dans le cours, sans même calculer de déterminant.

Exercice 2. De manière générale, ce qui a été traité dans cet exercice a été bien traité. J'insiste cependant sur les points suivants.

— **I.1.b** Dire que $a = \frac{ks}{2}$ avec a entier n'est pas suffisant pour affirmer que s est pair, cela dépend de k (pour nous $k = 3$, c'était bon). Une justification, par exemple via le lemme de Gauss, était attendue.

— **II.1.c** Pour que $\mathcal{G}$ ait un 4-cycle passant par s et s', il faut qu'il y ait deux chaînes $s - s_1 - s'$ et $s - s_2 - s'$ avec $s_1 \neq s_2$. Beaucoup ont oublié de préciser cette dernière condition.

— **II.2.a** Il fallait citer **I.2.a**.

— **II.2.b** On avait le droit de déplacer $s_0, \ldots, s_{13}$ pour le dessin.

- **II.2.e** Il y avait une subtilité dans la définition de cycle élémentaire. Un cycle élémentaire est défini modulo permutation circulaire des sommets visités, mais pas modulo inversion de l'ordre. En toute rigueur il y avait donc six cycles élémentaires et pas trois, et il fallait justifier que le compte était complet.
- **III.1** Attention à toujours bien distinguer les matrices et les applications linéaires qu'elles représentent dans des bases.
- **IV.2** Il y avait une erreur d'énoncé (vue par 1 copie). On aurait du prendre par exemple $\rho = (s_0 s_6 s_2)(s_4 s_8 s_{10})(s_1 s_5 s_7)(s_3 s_{13} s_{11})$.

Utiliser des termes appropriés.

- Le terme de « suite géométrique » est en principe réservé aux suites numériques et l'usage pour les suites de matrices me semble incongru. C'est peut-être parce que le comportement des puissances d'une matrice dépend beaucoup de cette matrice. Selon qu'elle est nilpotente ou diagonalisable, ce comportement est très différent, par exemple.
- Les termes « segment » et « polygone » sont à réserver au contexte géométrique ; pour les graphes, préférer arête et cycle.
- De même, au lieu de « heptagones et toutes ses diagonales » dites « graphe complet sur 7 sommets ».
- Au lieu de « un seul morceau » dites « une seule composante connexe ».

Référence aux questions précédentes. Elles doivent toujours être explicites et précises.

Conseils généraux de rédaction. La ponctuation doit être toujours présente même dans les formules. Les abréviations ne doivent pas être utilisées abusivement. Dans les phrases en français, il est préférable d'écrire les quantificateurs en toutes lettres : $\forall$ et $\exists$ sont des symboles, pas des abréviations.