COLLES MP* 2013-2014 AU LYCÉE MARCELIN BERTHELOT

GABRIEL PALLIER

Le nom des étudiants concernés pour chaque exercice (sauf oublis...) est dans la marge. Des indications ou éléments de correction peuvent être fournis sur demande avec le numéro de l'exercice, adressée à `gabriel@pallier.org`. *Il reste sûrement des erreurs d'énoncé, merci de me les signaler. Bon courage pour les oraux.*

Edit : voir aussi les exercices de l'année 2014-2015 (attention au changement de programme).

TABLE DES MATIÈRES

Date: 2012—2013.

A. Combinatoire, dénombrabilité (19 septembre)

Samir

Exercice 1 (Coefficient multinômial)**.** On suppose que les a_k sont des entiers naturels tels que $\sum_{i=1}^{k} a_k = n$. Montrer que $a_1!a_2!\cdots a_k!$ divise $n!$

Vladislav, Rémi

Exercice 2 (Cardinal de $\mathcal{P}(X)$)**.** Existe-t-il un ensemble X tel que $\mathcal{P}(X)$ est infini dénombrable ?

Vladislav

Exercice 3 (Curryfication)**.** Soient E, F et G trois ensembles. Montrer que

$$\mathcal{F}(E, \mathcal{F}(F, G)) \text{ et } \mathcal{F}(E \times F, G)$$

sont équipotents.

Vladislav, Rémi

Exercice 4 (Dénombrement des applications croissantes)**.** On souhaite dénombrer les applications croissantes de $\{1, ..., n\}$ dans $\{1, ..., p\}$.

1. Montrer que l'ensemble $\mathcal{C}_{n,p}$ des aplications croissantes de $\{1, ..., n\}$ dans $\{1, ..., p\}$ est en bijection avec l'ensemble $\mathcal{C}^{+}_{n,n+p-1}$ des applications strictement croissantes de $\{1, ..., n\}$ dans $\{1, ..., n+p-1\}$.
2. Dénombrer $\mathcal{C}^{+}_{n,n+p-1}$ et conclure.
3. On dit d'une application f de $\{1, \dots n\}$ dans $\{1, \dots p\}$ qu'elle est k-croissante si $f(m+1) - f(m) \geqslant k$ pour tout m dans $\{1, \dots n-1\}$. Combien y a-t-il d'applications k croissantes de $\{1, ..., n\}$ dans $\{1, ..., p\}$?

Arnaud

Exercice 5 (Autour du crible de Poincaré)**.** On notera $|X|$ le cardinal d'un ensemble X fini.

1. Démontrer la formule du crible de Poincaré : si $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une famille de parties finies de X, alors
$$\left| \bigcup_i X_i \right| = \sum_i |X_i| - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |X_i \cap X_j| + \cdots + (-1)^{n-1} |X_1 \cap \cdots \cap X_n| .$$
2. Deux entiers n et p étant donnés, on souhaite obtenir le nombre $\mathcal{S}(n,p)$ des surjections de $\{1, ..., n\}$ dans $\{1, ..., p\}$. On note, pour $1 \leqslant i \leqslant p$
$$\mathcal{N}_i(n,p) = \{f \in \mathcal{F}(\{1, \dots, n\}, \{1, \dots p\}), \ \forall m \in \{1, \dots, n\}, \ f(n) \neq i\}$$
En appliquant la formule du crible aux $\mathcal{N}_i$, montrer que
$$\text{(S)} \qquad \mathcal{S}(n,p) = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (-1)^{p-k} k^n.$$
3. On rappelle que $\varphi(n)$ est le nombres d'entiers naturels k tels que $1 \leqslant k \leqslant n$ qui sont premiers à n. En utilisant la formule du crible de Poincaré, montrer que
$$\varphi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Thibaut

Exercice 6 (Inversion de Pascal et applications)**.** Dans cet exercice on va (entre autres) retrouver la formule (S) par une autre méthode.

1. (Re)démontrer la formule d'inversion de Pascal : Si a et b sont deux suites réelles telles que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \ a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k,$$
alors
$$\forall n \in \mathbb{N}, \ b_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} a_k.$$

On pourra raisonner par récurrence, ou bien en introduisant une application linéaire bien choisie.

2. On note $\mathcal{F}(n,p)$ l'ensemble des applications de $\{1,...,n\}$ dans $\{1,...,p\}$ et $\mathcal{S}(n,p)$ le nombre de surjections ; par ailleurs

$$\mathcal{F}_k(n,p) = \{f \in \mathcal{F}(n,p),\ |f(\{1,\ldots,n\})| = k\}.$$

Dénombrer $\mathcal{F}_k(n,p)$ en fonction des $\mathcal{S}(n,k)$; en déduire que

$$\mathcal{S}(n,p) = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (-1)^{p-k} k^n.$$

3. Un dérangement est une permutation sans point fixe. Montrer que toute permutation σ de $\mathcal{S}_n$ est la donnée de son support $\{k \mid \sigma(k) \neq k\}$ et d'un dérangement de ce support. Combien y a-t-il de dérangements dans l'ensemble des permutations de $\{1,\ldots n\}$?

Exercice 7 (Suites monotones)**.** Y a-t-il autant de suites croissantes d'entiers naturels que de suites décroissantes d'entiers naturels ? **Arnaud** (2012)

Exercice 8. On s'intéresse aux cercles du plan sans point de coordonnées rationnelles. **Samir**

1. Soit $x \in \mathbb{R}^2$. Montrer qu'il existe un cercle $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ centré en x ne rencontrant pas $\mathbb{Q}^2$, non réduit à un point.
2. Soient y et z distincts, pris dans $\mathbb{R}^2 - \mathbb{Q}^2$. Montrer qu'il existe un cercle Γ de $\mathbb{R}^2$ ne rencontrant pas $\mathbb{Q}^2$ passant par y et z.
3. Soit $d > 0$. Montrer qu'il existe un cercle de $\mathbb{R}^2$ ne rencontrant pas $\mathbb{Q}^2$ de diamètre d.

Exercice 9 (Dénombrement de $\mathrm{SL}(n,\mathbb{F}_p)$)**.** On rappelle que si p est un nombre premier, $\mathbb{F}_p$ désigne le corps à p éléments $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z},+,\times)$. **Arnaud**

1. Quel est le cardinal du groupe $\mathrm{GL}(n,\mathbb{F}_p)$? *On pourra compter les bases de $\mathbb{F}_p^n$.*
2. Montrer que l'application det est surjective de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{F}_p)$ sur $\mathbb{F}_p^\star$. En déduire une expression du cardinal de $\mathrm{SL}(n,\mathbb{F}_p)$.

Exercice 10 (Nombre de surjections, [11])**.** Encore une preuve de (S). **Jean-Loup**

1. Soit X un ensemble fini. Montrer

$$\sum_{A\subset X} (-1)^{|A|} = \begin{cases} 0 & \text{si } X \neq \emptyset \\ 1 & \text{si } X = \emptyset. \end{cases}$$

2. En déduire que

$$\mathcal{S}(n,p) = \sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k} (-1)^{p-k} k^n.$$

Exercice 11 (ENS – Premiers sommes de deux carrés, par D. Zagier [2, 4.35])**.** Soit p un nombre premier congru à 1 modulo 4. On souhaite montrer que p est somme de deux carrés. **Jean-Loup**

1. Soit $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{N}^3 \mid x^2 + 4yz = p\}$. Montrer que S est fini et non vide.
2. Soit f la fonction de S dans S définie par

$$(x,y,z) \mapsto \begin{cases} (x+2z, z, y-x-z) & \text{si} \quad x < y-z \\ (2y-x, y, x-y+z) & \text{si} \quad y-z < x < 2y \\ (x-2y, x-y+z, y) & \text{si} \quad x > 2y. \end{cases}$$

Montrer que f est bien définie sur S, qu'elle admet exactement un point fixe et qu'elle est involutive [1]. En déduire que $|S|$ est impair.

3. Soit g l'involution de S donnée par
$$(x, y, z) \mapsto (x, z, y)$$
Montrer que g admet au moins un point fixe, i.e. il existe un triple tel que $g(s) = s$. Conclure.

Cet exercice est corrigé page 28.

2012

Exercice 12 (* Théorème de Cantor-Bernstein)**.** On se propose de démontrer le théorème suivant :
Soient X et Y deux ensembles. On suppose qu'il existe $i : X \to Y$ et $j : Y \to X$ toutes deux injectives. Alors X et Y sont équipotents.

1. Démontrer le théorème quand X ou Y est fini, puis quand X ou Y est dénombrable.
2. Soit Z l'union des copies disjointes de X et Y, et f le recollement de i et j sur Z, i.e.
$$f(z) = \begin{cases} i(z) & z \in X \\ j(z) & z \in Y. \end{cases}$$
On dit que $z \in Z$ est un *ancêtre de* $z' \in Z$ s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $z' = f^n(z)$. On note $A(z)$ l'ensemble des ancêtres de z. Que dire de $|A(f(z))|$ en fonction de $|A(z)|$? Conclure.

Exercice 13 ([9])**.** On rappelle (voir exercice 5 par exemple) que la fonction indicatrice d'Euler φ est telle que
$$\varphi(n) = n \prod_{p|n} (1 - 1/p).$$
Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \varphi(n) = +\infty$.

1. On dit d'une application f d'un ensemble dans lui-même qu'elle est une involution si $f \circ f$ est égale à l'identité. De manière équivalente, f est une bijection et $f = f^{-1}$.

B. Groupes, anneaux, corps, polynômes (26 septembre)

Exercice 14 (Ordre maximal)**.** Quel est l'ordre maximal d'un élément de $\mathcal{S}_{10}$? de $\mathcal{A}_{10}$? **Lucie**

Exercice 15 (Formule de Legendre)**.** Combien y a-t-il de zéros à la fin de l'écriture décimale de 1000! ? **Pauline**

Exercice 16 (Théorème dit de Wilson, applications [2, 4.12])**.** **Thomas**

1. Montrer que n est premier si et seulement s'il divise $(n-1)!+1$
2. Soit p congru à 1 modulo 4 Montrer que $\left(\frac{p-1}{2}\right)!^2$ est congru à -1 modulo p
3. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que $\overline{-1}$ soit un carré dans $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$
4. Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à 1 modulo 4.

Exercice 17 (Un anneau non principal)**.** Montrer que l'anneau $\mathbb{Z}[X]$ n'est pas principal. **Mathilde, Clément**

Exercice 18 ([6])**.** Quels sont les groupes G dont le groupe d'automorphisme $\mathrm{Aut}(G)$ est trivial ? *On pourra commencer par montrer qu'un tel groupe est abélien.* **Arthur**
Cet exercice est corrigé page 29.

Exercice 19 (Irréductibilité de X^4+1 suivant le corps de base)**.** **Clément**

1. Montrer que X^4+1 est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$
2. Montrer que l'ensemble $\mathbb{F}_p^{\star 2}$ des carrés de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\star$ forme un sous-groupe de cardinal $\frac{p-1}{2}$, puis que le produit de deux non-carrés est un carré.
3. Soit p un nombre premier impair. Montrer que -1, 2 ou -2 est un carré modulo p. En déduire que X^4+1 n'est pas irréductible dans $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$

Exercice 20 (* Un jeu dans les groupes finis [5, 1st day, Problem 3])**.** Alice et Bob, amis de longue date, décident de jouer au jeu suivant : ils se donnent un groupe G fini. Puis, il choisissent chacun leur tour (en commençant par Alice) un élément de G, sachant qu'il est interdit de prendre un élément qui a déjà été choisi. Le premier joueur à choisir un élément qui, avec tous ceux précédemment choisis, permet d'engendrer le groupe total G a perdu. **Mathilde**

1. Montrer que, pour $G=\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, Bob possède une stratégie gagnante si et seulement si $n=1$ ou $4 \mid n$.
2. On choisit le groupe symétrique $\mathcal{S}_n$. Lequel des deux joueurs possède une stratégie gagnante ?

Cet exercice est corrigé page 29.

C. Algèbre linéaire élémentaire (3 octobre)

Jules, Etienne

Exercice 21 (ENSAE — Un calcul de déterminant)**.** Soient $n, p \in \mathbb{N}^\star$ et

$$(a_1, \dots a_p), (b_1, \dots b_p) \in \mathbb{C}^p$$

tels que pour tous i, j, $a_i b_j \neq 1$. On définit une matrice $G \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ par :

$$G := \left(\frac{1 - a_i^n b_j^n}{1 - a_i b_j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant p}.$$

1. On suppose $p = n$. Calculer $\det\ G$ en fonction des a_i et des b_k *On pourra identifier G à un produit de matrices du type «Vandermonde».*
2. On suppose $p > n$. Montrer que $\det\ G = 0$

Exercice 22 (Un déterminant)**.** Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et $\theta \in \mathbb{R} \backslash \pi\mathbb{Z}$, montrer l'identité pour le déterminant d'ordre n suivante :

$$d_n(\theta) = \det \begin{pmatrix} 2\cos\theta & 1 & & & (0) \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & & \\ & 1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 2\cos\theta & 1 \\ (0) & & & 1 & 2\cos\theta \end{pmatrix} = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}.$$

Que dire si $\theta \in \pi\mathbb{Z}$?

Johanna (2012)

Exercice 23 (Suites exactes et relation d'Euler-Poincaré)**.** Soit k un corps. Une *suite exacte* est la donnée d'une famille $(E_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ de k-espaces vectoriels, et d'une famille de morphismes $(u_k)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ telle que $u_i : E_i \to E_{i+1}$ et $\mathrm{Im}\ u_i = \mathrm{Ker}\ u_{i+1}$ pour tout i entre 0 et $n-1$. On écrit une suite exacte sous la forme

$$0 \to E_1 \xrightarrow{u_1} \cdots \xrightarrow{u_{n-2}} E_{n-1} \to 0.$$

1. Montrer que dans une suite exacte, les dimensions des espaces vectoriels vérifient la relation d'Euler-Poincaré
$$\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \dim E_i = 0.$$
2. Montrer qu'il s'agit de la seule relation k-linéaire vérifiée (à multiplication scalaire près).
3. Montrer que la formule de Grassmann, $\dim E + F = \dim E + \dim F - \dim E \cap F$, est un cas particulier de la relation d'Euler-Poincaré.

Victor, Paul

Exercice 24 (Centrale-Supélec — Commutant de la transposition)**.** Soit k un corps de caractéristique $\neq 2$ (on pourra prendre $k = \mathbb{R}$ pour simplifier). Soit

$$E = \left\{ f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(k)) : \forall M \in \mathcal{M}_n(k), f({}^tM) = {}^tf(M) \right\}.$$

Quelle est la dimension de E ?

Pablo

Exercice 25 (Matrices magiques)**.** Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et k un corps de caractéristique $\neq 2$, $\mathrm{Mag_n}(k)$ est l'ensemble des matrices dont les sommes des coefficients de chaque ligne sont égales entre elles et aussi égales aux somme des coefficients sur chaque colonne ainsi qu'à la somme des termes diagonaux.

1. Montrer que $\mathrm{Mag_n}(k)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(k)$ stable par transposition
2. Montrer que si $M \in \mathrm{Mag_n}(k)$, alors sa partie symétrique S_M et sa partie antisymétrique A_M sont également dans $\mathrm{Mag_n}(k)$. En déduire $\mathrm{Mag_3}(k)$.
3. $\mathrm{Mag_3}(\mathbb{R})$ est-elle une sous-algèbre de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

4. Si $M \in \mathrm{Mag_n}(\mathbb{R})$ est inversible, son inverse est-elle une matrice magique ?
5. * Montrer qu'il existe $M \in \mathrm{Mag}_3(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont dans $\mathbb{N}$ et sont distincts.

Exercice 26 (Similitude et extensions de corps)**.** Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$ qui sont semblables sur $\mathbb{C}$. On souhaite montrer que A et B sont semblables sur $\mathbb{Q}$. **Etienne**

1. Soient $M_1, \dots M_r$ des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui sont libres sur $\mathbb{Q}$. Montrer qu'elles sont libres sur $\mathbb{C}$.
2. Montrer que l'ensemble des $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AM = MB$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel non nul qui admet une base $M_1, \dots M_r$ de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$.
3. Montrer que $Q : x_1, \dots x_r \mapsto \det\left(\sum x_i M_i\right)$ est une fonction polynômiale à coefficients dans $\mathbb{Q}$.
4. Montrer que si k est un corps infini et si $P(x_1, \dots, x_r) = 0$ pour tous $x_1, \dots, x_r \in k$, alors $P = 0$ en tant que polynôme. *On pourra procéder par récurrence sur r et utiliser une matrice de Vandermonde bien choisie.* Montrer que $Q \neq 0$ dans $\mathbb{Q}[X]$ puis conclure.

Exercice 27 (Un peu d'algèbre extérieure)**.** Soit E de dimension n sur k. On rappelle qu'une (k-)forme p-linéaire alternée sur E est une application $\varphi : E^p \to k$ qui est k-linéaire en chacune des variables, et telle que $\varphi(u_1, \dots, u_n) = 0$ s'il existe i et j tels que $u_i = u_j$. On note $\Lambda^p(E)$ l'ensemble des formes $p-$linéaires alternées sur E. **Johanna**

1. Vérifier que $\Lambda^p(E)$ est un k-espace vectoriel et que $\Lambda^1(E) = E^\star$.
2. Soit φ une forme n-linéaire alternée sur E. Montrer qu'il existe $\mathcal{B}$ une base de E telle que $\varphi = \det_{\mathcal{B}}$ où $\det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots u_n)$ est le déterminant des vecteurs u_i dans la base $\mathcal{B}$. Quelle est la dimension de $\Lambda^n(E)$?
3. Montrer que $\dim_k \Lambda^p(E) = \binom{n}{p}$.

D. Réduction des endomorphismes (10 octobre)

Dans tous les exercices, $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$ et E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. χ_u et μ_u sont les polynômes caractéristique et minimal de u (on prendra pour convention $\chi_u(\lambda) = \det(u - \lambda I_n) = (-1)^n \det(\lambda I_n - u)$ et μ_u unitaire).

Mohammed, Raphaël

Exercice 28 (Eléments nilpotents de $\mathbb{K}[f]$)**.** Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et

$$\mathcal{J} = \{P \in \mathbb{K}[X],\ P(f)\,\text{nilpotent}\}.$$

Montrer que $\mathcal{J}$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ puis déterminer, en fonction de μ_f, un générateur.

Paul

Exercice 29 (Mines-Ponts — Endomorphismes simples)**.** Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ de polynôme caractéristique χ_u. Montrer que χ_u est irréductible dans $\mathbb{K}[X]$ si, et seulement si, $\{0\}$ et E sont les seuls espaces stables de u.

Auriane

Exercice 30 (Polynôme minimal prescrit)**.** Pour quelles valeurs de l'entier n existe-t-il une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le polynôme minimal est $\mu_M = \left(1 + X^2\right)^2$?

Benjamin

Exercice 31 (* Sommes d'espaces cycliques [7, 7.1])**.** Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Pour cet exercice on signale/rappelle que par définition le polynôme minimal ponctuel $\mu_{f,x}$ de f en $x \in E$ est le générateur unitaire de l'idéal

$$\{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(f)(x) = 0\}.$$

et que $E_{f,x}$ est l'espace (dit «cyclique ») engendré les $f^k(x)$. S'il existe x tel que $E = E_{f,x}$ alors on dit que E est cyclique.

1. Montrer que si f possède n valeurs propres distinctes alors f est cyclique.
2. On suppose que x et y sont tels que $\mu_{f,x}$ et $\mu_{f,y}$ sont premiers entre eux. Montrer que
$$E_{f,x+y} = E_{f,x} \oplus E_{f,y}.$$
Retrouver le résultat de la question précédente.

Raphaël

Exercice 32 (* Sur les groupes abéliens finis)**.** Soit n un entier naturel.

1. Soit G un sous-groupe fini de $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$. Montrer que tous les éléments de G sont diagonalisables sur $\mathbb{C}$.
2. On suppose de plus que G est abélien. Montrer qu'il est isomorphe à un sous-groupe d'un produit direct de groupes cycliques.
3. Montrer que tout groupe abélien fini est sous-groupe d'un produit direct de groupes cycliques (et se surjecte sur chacun des facteurs).

En fait on peut montrer que tout groupe abélien fini est isomorphe à un produit direct de groupes cycliques.

Raphaël

Exercice 33 (* Un théorème de Brauer)**.** Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on rappelle que $P_\sigma \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$ est définie par $P_\sigma := \left(\delta_{i\sigma(j)}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. On cherche à démontrer que deux permutations sont conjuguées si et seulement si leur matrices de permutations sont semblables. On rappelle que deux permutations sont conjuguées dans $\mathcal{S}_n$ si et seulement si elles ont la même structure de cycle.

1. Montrer que si σ et σ' sont conjuguées dans $\mathcal{S}_n$ alors P_σ et $P_{\sigma'}$ sont semblables (sur $\mathbb{Q}$).
2. Calculer le polynôme caractéristique de P_σ en fonction des nombres $c_\ell(\sigma)$ de cycles de longueurs ℓ dans la décomposition de σ.
3. En déduire que si P_σ et $P_{\sigma'}$ sont semblables (sur $\mathbb{Q}$) alors σ et σ' sont conjuguées dans $\mathcal{S}_n$.

E. Révisions d'algèbre linéaire (17 octobre)

Exercice 34 (CCP — Déterminant et polynôme annulateur)**.** Montrer que toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^3 - 3A - 5I_n = 0$ est de déterminant strictement positif.

Exercice 35 (Cette matrice carrée est-elle un carré ?)**.** Existe-t-il une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $n \geqslant 2$ telle que

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} ?$$

Exercice 36. 1. Soient $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Montrer que $(AB - BA)^2$ est scalaire.

2. Montrer que $AB + BA = (\operatorname{tr} A) B + (\operatorname{tr} B) A + (\operatorname{tr} AB - \operatorname{tr} A \operatorname{tr} B) I_2$
3. En déduire que si $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B = 0$, alors $AB + BA$ est scalaire.

Exercice 37 (Mines-ponts $\sim$ 2000 — Décomposition de Fitting)**.** Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que si $\operatorname{Ker} f$ admet un supplémentaire S stable par f alors $S = \operatorname{Im} f$.
2. Montrer que pour r assez grand on a la décomposition (de Fitting)

$$E = \operatorname{Ker} f^r \oplus \operatorname{Im} f^r$$

Quelle est la forme de la matrice de f dans une base adaptée à cette décomposition ?

Exercice 38 (* Le théorème de Maschke)**.** Soit G un sous-groupe fini de $\mathbf{GL}(E)$ de cardinal m, où E est un espace vectoriel de dimension finie sur k corps de caractéristique nulle. On dit que F est un sous-espace vectoriel G-stable s'il est stable par tout $g \in G$. L'objet de l'exercice est de démontrer que *tout sous-espace vectoriel G-stable admet un supplémentaire G-stable.* **Arnaud**

1. Soit F un sous-espace vetoriel G-stable. On se donne F' un supplémentaire de F dans E, et p un projecteur sur F parallèlement à F'. Montrer que si p commute à tous les éléments de G, alors F' est G-stable.
2. On pose

$$q = \frac{1}{m} \sum_{g \in G} g \circ p \circ g^{-1}.$$

Montrer que q est un projecteur d'image F.
3. En déduire que $\operatorname{Ker} q$ est G-stable. Conclure.
4. Montrer que le résultat tient encore si k est de caractéristique p première à m, puis donner des contre-exemples dans le cas où $p = m$.

Exercice 39 (* ENS Lyon — Le n de $\mathbf{GL}_n$ [3, 3.4])**.** Les corps sont de caractéristique différente de 2.

1. Soit k un corps et G un sous groupe de $\mathbf{GL}_n(k)$ tel que

$$\forall g \in G,\ g^2 = \operatorname{Id}.$$

Montrer que G est fini, de cardinal au plus 2^n.

2. Soient k_1, k_2 deux corps de caractéristique $\neq 2$, on suppose qu'il existe un morphisme injectif
$$\varphi : \mathbf{GL}_{n_1}(k_1) \to \mathbf{GL}_{n_2}(k_2).$$
Montrer que $n_1 \leqslant n_2$. Existe-t-il n et m et un morphisme injectif de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathbf{GL}_m(\mathbb{R})$?

3. *Cette question peut être résolue indépendamment des deux précédentes.* Montrer que si $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ et $\mathbf{GL}_m(\mathbb{C})$ sont isomorphes, alors $n = m = 0$.

F. Séries numériques (7 novembre)

On admettra pour l'exercice 42 que π est irrationnel.

Exercice 40 (Centrale-Supélec — Nature d'un produit infini)**.** Soit (u_n) la suite définie par **Lucie, Maggie**

$$u_n = \prod_{k=2}^{n} \left(1 + \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right).$$

1. Montrer que $u_n \to 0$.
2. La série de terme général u_n est-elle convergente ?

Exercice 41 (Centrale-Supélec — Nature d'une série à paramètre)**.** Discuter, selon la valeur du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$, de la nature de la série **Virgile**

$$\sum_{n \geqslant 0} (-1)^{\mathrm{E}(\sqrt{n})} n^{-\alpha}.$$

Exercice 42. Discuter, selon la valeur du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}_+$, de la nature de la série **Sandra, Arthur**

$$\sum_{n \geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n^\alpha + \cos n}.$$

On pourra utiliser, en justifiant : $\frac{1}{n^\alpha+\cos n} = \frac{1}{n^\alpha} - \frac{\cos n}{n^{2\alpha}} + \cdots + (-1)^k \frac{\cos^k \alpha}{n^{k\alpha}(n^\alpha+\cos n)}$.

Exercice 43 (Série de Sylvester)**.** 1. Soit (a_n) la suite réelle vérifiant $a_1 = 2$ et l'équation de récurence $\forall n \geqslant 1,\ a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1$. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}$ converge. Quelle est sa somme ? **Clément**

2. Montrer que tout $\gamma \in \mathbb{R}_+^\star$ s'écrit, de manière unique, comme

$$\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{q_n}$$

où les q_i sont des entiers naturels tels que $q_{n+1} \geqslant q_n^2 - q_n + 1$. A quelle condition sur les q_n le nombre γ est-il rationnel ?

G. Espaces vectoriels normés (14 novembre)

Exercice 44 (Une norme sur $\mathbb{R}^2$)**.** Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose :

$$N(x, y) := \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{|x + ty|}{1 + t^2}.$$

1. Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.
2. Comparer cette norme à la norme euclidienne en donnant le meilleur encadrement possible.
3. Donner une expression explicite de $N(x, y)$ et représenter sa boule unité dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 45 (Dualités topologiques)**.** 1. On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ des polynômes $P = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k X^k$ de la norme $\|P\|_\infty = \max_{k \geqslant 0} |\alpha_k|$. Montrer que toute forme linéaire continue pour $\|P\|_\infty$ est de la forme

$$\varphi_\lambda \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k X^k \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k \lambda_k,$$

pour une unique suite $\lambda = (\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sommable. Calculer la norme subordonnée de φ_λ en fonction de λ.

2. On remplace $\|\cdot\|_\infty$ par $\|\cdot\|_1$. Sous les mêmes hypothèses, montrer que λ est une suite réelle bornée.
3. Même question avec la norme $\|\cdot\|_2$.

Exercice 46 (Normes sur $\mathbb{R}[X]$)**.** 1. Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Donner deux normes non équivalentes sur E.

2. Soit ∂ l'opérateur de dérivation. Donner un exemple de norme pour laquelle ∂ est continu, un exemple de norme pour laquelle ∂ n'est pas continu. Montrer que l'on peut normer E de manière à ce que la norme d'opérateur de ∂ soit arbitrairement petite.
3. Soit μ l'endomorphisme de E associé à la multiplication par X. Donner une norme qui rende μ continu. Existe-t-il une norme sur E qui rende simultanément ∂ et μ continus ?

Exercice 47 (Conditions pour une équivalence de normes)**.** Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$, $\varphi \in E$ et Z l'ensemble des zéros de φ. Pour tout élément f de E, on note $N(f) = \|\varphi f\|_\infty$.

1. A quelle condition sur Z l'application N est-elle une norme sur E ?
2. A quelle condition sur Z l'application N est-elle une norme équivalente à $\|\cdot\|_\infty$?

H. Topologie I : Compacité, connexité par arcs (21 novembre)

Il est entendu que tous les espaces considérés sont **contenus dans des espaces vectoriels normés**.

Exercice 48 (Mines-Ponts [1]). Soit K un compact convexe et $f : K \to K$ qui est $1-$lipschitzienne. Montrer que f admet un point fixe. **Thomas**

Exercice 49. Soit E un espace vectoriel normé réel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel strict. Montrer que $E \backslash F$ est connexe par arcs si et seulement si codim $F \geqslant 2$. Même question avec E un e.v.n. complexe.

Exercice 50 (Sous-groupes de $\mathbb{C}^\star$). **Mathilde, Mohammed**

1. Quels sont les sous-groupes compacts de $\mathbb{C}^\star$?
2. Trouver le plus possible de sous-groupes connexes par arcs et fermés dans $\mathbb{C}^\star$.

Exercice 51 (Ecole polytechnique, 2011 [8]). Montrer qu'entre deux points de $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$ il existe un arc C^∞ d'image contenue dans $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$. *On pourra utiliser l'exercice 8.*

Exercice 52. Soit K un compact (dans un e.v.n., donc). **Pauline, Paul**

1. Montrer qu'il contient une partie dénombrable dense.
2. On suppose de plus que K est connexe par arcs. Montrer que K est équipotent soit à $\{0\}$, soit à $\mathbb{R}$ (on dit qu'il a la puissance du continu). *On pourra utiliser le théorème de Cantor-Bernstein, exercice 12.*

I. Topologie II : Compacité, complétude (28 novembre)

Avertissement : la complétude n'est plus au programme depuis la rentree 2014.

Exercice 53 (Endomorphismes laissant un compact stable)**.** Soit K une partie compacte d'un espace vectoriel normé E de dimension finie, et $\mathcal{K}$ l'ensemble des endomorphismes u de E vérifiant $u(K) \subset K$.

1. Montrer que $\mathcal{K}$ est une partie compacte de $\mathcal{L}(E)$ si, et seulement si, K engendre E.
2. On suppose de plus que K est un voisinage de 0. Montrer que tout endomorphisme $u \in \mathcal{K}$ vérifie $|\det u| \leq 1$.

Exercice 54. Soit E l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont lipschitziennes, muni de la norme

$$\|f\| = |f(0)| + \sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x\neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|}.$$

1. Vérifier les assertions de l'énoncé (espace vectoriel, norme)
2. Montrer que E est complet.
3. On remplace la norme précédente par

$$N(f) = |f(0)| + \sup_{x\neq 0} \frac{|f(x) - f(0)|}{|x|}.$$

L'espace E est-il toujours complet ?

Johanna

Exercice 55 (* Contractions d'un Banach)**.** Soit E un espace de Banach et f une application contractante de E dans E (i.e., ρ-lipschitzienne avec $\rho < 1$)

1. Montrer que f possède un unique point fixe a. Donner des contre-exemples si E n'est pas complet.
2. Montrer que $g = \mathrm{Id}_E + f$ est bijective de E sur E, puis que c'est un homéomorphisme de E.
3. On suppose à présent E de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel qu'il existe une norme N sur E pour laquelle $|||\mathrm{Id}_E - u|||_N < 1$, où $|||-|||_N$ est la norme subordonnée à N. Montrer que $u \in \mathbf{GL}(E)$.
4. En déduire que les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à diagonale strictement dominantes, i.e. telles que

$$|a_{ii}| > \sum_{j\neq i} |a_{i,j}|$$

sont inversibles (Hadamard). Est-ce toujours vrai dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$?

Exercice 56 (Autour du théorème des fermés emboîtés)**.** On se place dans un espace vectoriel normé complet E.

1. Soit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de boules fermées décroissante pour l'inclusion. Montrer que

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n \neq \emptyset.$$

2. Soit $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de convexes fermés bornés décroissante pour l'inclusion. L'intersection est-elle non vide ?

J. Révisions d'analyse de 1ere année (5 décembre)

Exercice 57. 1. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ telle que **Auriane, Maggie**

$$\forall n\in\mathbb{N}, \begin{cases} f^{(n)}(0) & = 0 \\ \sup_{\mathbb{R}} \left|f^{(n)}\right| & \leq \lambda^n n! \end{cases}.$$

Montrer que f est nulle sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{\lambda},\frac{1}{\lambda}\right[$, puis sur $\mathbb{R}$.

2. Est-ce toujours vrai si l'on suppose f à valeurs dans un espace de Banach E ?

Exercice 58 (Formule de Leibniz)**.** Calculer la dérivée n-ième de $x\mapsto x^n(1-x)^n$. En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$. **Benjamin**

Exercice 59. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ bornée. **Sandra, Raphaël**

1. On suppose qu'une dérivée $f^{(k)}, k\geqslant 2$, admet un nombre fini de zéros. Montrer que les dérivées précédentes $f^{(p)}, 1\leqslant p<k$ tendent vers 0 au voisinage de $\pm\infty$.
2. En déduire que pour tout $k\geqslant 2$, $f^{(k)}$ s'annule au moins $k-1$ fois sur $\mathbb{R}$.
3. Trouver une fonction f telle que $f^{(k)}$ s'annule exactement $k-1$ fois sur $\mathbb{R}$.

Exercice 60. Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. **Benjamin**

1. Existe-t-il toujours $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ lipschitzienne telle que $\varphi\leq f$?
2. Soit $k>0$. Trouver une CNS sur f pour que φ k-lipschitzienne minorant f existe.
3. On suppose cette CNS vérifiée pour $k_0>0$. Montrer que si $k>k_0$ alors il existe φ_k , k -lipschitzienne minorant f et maximale pour l'ordre usuel des fonctions.

Exercice 61 (Quelques sommes de Riemann [1])**.** Calculer les limites suivantes **Auriane**

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{kn}, \tag{J.1}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}\left(\sqrt{1(n-1)}+\sqrt{2(n-2)}+\cdots+\sqrt{(n-1)1}\right), \tag{J.2}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \ln\left(1+\frac{\pi}{n}\right)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2+\cos(3k\pi/n)}, \tag{J.3}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left|e^{2i\pi k/n}-1\right|. \tag{J.4}$$

Exercice 62. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ telle qu'il existe $P\in\mathbb{R}[X]$ de degré impair tel que **Virgile**

$$\forall n\in\mathbb{N},\forall x\in\mathbb{R},\ \left|f^{(n)}(x)\right|\leq|P(x)|.$$

1. Montrer que f est nulle.
2. Donner un contre-exemple si P est de degré pair.

Exercice 63 (Ecole poytechnique — Interpolation d'Hermite [4])**.** 1. Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^4$ telle que $f(0)=f'(0)=f(1)=f'(1)=0$. Montrer que pour tout $x\in[0,1]$ il existe $\xi\in\,]0,1[$ tel que **Virgile**

$$f(x)=\frac{f^{(4)}(\xi)}{24}x^2(1-x)^2.$$

2. Soit $0 = x_0 < \cdots < x_n = 1$ une subdivision de $[0,1]$. Montrer qu'il existe Φ de classe $\mathscr{C}^1$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ tel que
$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, (\Phi(x_i), \Phi'(x_i)) = (f(x_i), f'(x_i)).$$
Et Φ est une fonction polynôme de degré $\leqslant 3$ sur les intervalles de subdivision $[x_i, x_{i+1}]$
3. Sous les hypothèses précédentes, montrer que
$$\|\Phi - f\|_\infty \leq \frac{\left\|f^{(4)}\right\|_\infty}{384} \sup_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)^2.$$

K. Espaces euclidiens (12 décembre)

Exercice 64 (Famille obtusangle et simplexe régulier)**.** Soit $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant N}$ une famille de vecteurs d'un espace euclidien E de dimension n telle que

$$\forall i \neq j, \langle x_i \mid x_j\rangle < 0.$$

1. Montrer que $N \leqslant n+1$.
2. Montrer que l'inégalité précédente est optimale en exhibant une telle famille avec $N = n+1$.
3. Montrer que l'on peut choisir $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n+1}$ tous de même norme de telle sorte que $\langle x_i \mid x_j\rangle = -1$ pour tous $i \neq j$.

Exercice 65 (Base antéduale)**.** Montrer que pour toute base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ d'un espace euclidien E, il existe une base $\mathscr{B}' = (e_1', \ldots, e_n')$ telle que

$$\forall x \in E,\ x = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i \mid x\rangle\, e_i'.$$

A quelle condition a-t-on $\mathscr{B} = \mathscr{B}'$?

Exercice 66 (Inégalité de Hadamard)**.** Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille de vecteurs d'un espace euclidien E de dimension n. Montrer que pour toute base $\mathscr{B}$ orthonormée,

$$\left|\det_{\mathscr{B}}(x_1, \ldots, x_n)\right| \leq \prod_{i=1}^{n} \|x_i\|.$$

A quelle condition a-t-on égalité ?

Exercice 67 (Extrait de Mines-Ponts)**.** Soit E un espace euclidien, u dans $\mathcal{L}(E)$. Montrer que $|||u||| = |||u^\star|||$.

Exercice 68 (Adapté de ENS)**.** On se place dans $\mathbb{R}^3$ canoniquement euclidien. Soit (u, v, w) une base, et $\Lambda = \mathbb{Z}u + \mathbb{Z}v + \mathbb{Z}w$ (un tel sous-groupe est appelé un *réseau* de $\mathbb{R}^3$) **Jean-Loup, Arnaud**

1. Soit r une rotation de $\mathbb{R}^3$ telle que $r(\Lambda) \subset \Lambda$. Montrer que $r(\Lambda) = \Lambda$.
2. Soit G le groupe des rotations de $\mathbb{R}^3$ laissant Λ stable. Montrer que G est fini, d'exposant [2] 6 au plus. Le déterminer quand $\Lambda = \mathbb{Z}^3 = \mathbb{Z}e_1 + \mathbb{Z}e_2 + \mathbb{Z}e_3$.
3. Un dodécaèdre régulier est un polyèdre possédant 20 sommets, 30 arêtes et 12 faces qui sont des pentagones réguliers. Existe-t-il un réseau Λ et un dodécaèdre régulier $\mathcal{D}$ dont tous les sommets sont dans Λ ?

---

2. L'exposant d'un groupe est l'ordre maximal

L. Endomorphismes des espaces euclidiens (19 décembre)

Lucie, Thomas

Exercice 69 (Trace nulle)**.** Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ autoadjoint de trace nulle. Montrer qu'il existe une base (x_i) orthonormée de E dans laquelle la matrice de u est de diagonale nulle.

Pauline, Clément

Exercice 70 (Mines-Ponts 2000)**.** Soit A une matrice réelle telle que $A^3 = {}^tAA$. A est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$, sur $\mathbb{C}$?

Clément

Exercice 71. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; déterminer

$$\inf_{(s_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})} \sum_{i,j} (a_{i,j} - s_{i,j})^2 .$$

Clément

Exercice 72 ([1, 14.25])**.** 1. Soient $x_1, \dots x_n$ des vecteurs d'un espace euclidien. Montrer que la matrice $G(x_1, \dots x_n) = (\langle x_i \mid x_j \rangle)$ est symétrique positive de même rang que la famille $(x_1, \dots x_n)$

2. On suppose $(x_1, \dots x_n)$ libre et on pose $F = \mathrm{Vect}(x_i)$. Soit $x \in E$ montrer que d, la distance euclidienne de x à F, vérifie

$$d^2 = \frac{\det G(x, x_1, \dots, x_n)}{\det G(x_1, \dots x_n)}.$$

3. Soit $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ une matrice symétrique positive. Montrer qu'il existe une famille $(v_1, \dots, v_n)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ telle que

$$\forall (i,j) \in \{1, \dots, n\}^2 ,\ m_{ij} = \langle v_i \mid v_j \rangle .$$

Arthur, Mathilde

Exercice 73 (Ecole polytechnique — Méthode de Gauss [4, 1.19] [3])**.** On considère le produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$

$$\langle P \mid Q \rangle = \int_0^1 P(t)\, Q(t)\, dt.$$

1. Montrer qu'il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ orthonormée telle que $\deg P_n = n$ pour tout n.
2. Montrer que P_n est scindé dans $\mathbb{R}$ à racines simples, toutes dans $]0,1[$
3. On fixe un entier $n \geqslant 1$, soient $\alpha_1, \dots \alpha_n$ les racines de P_n. Montrer qu'il existe des réels $\lambda_1, \dots \lambda_n$ tels que pour tout $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$ on ait

$$\int_0^1 P(t)\, dt = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P(\alpha_i) .$$

---

3. Notre énoncé est assez éloigné de la référence

M. Révisions d'algèbre et de topologie (9 Janvier)

Les énoncés portent sur la topologie des espaces de matrices sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercice 74 (Rang et topologie)**.** Soient m, n, r trois entiers naturels, tels que $r \leqslant \min(m, n)$. On se place dans l'espace vectoriel normé $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ où l'on considère les parties

$$\begin{aligned} X_r &= \{M \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \mid \text{rg } M = r\} \\ X_{\leqslant r} &= \{M \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \mid \text{rg } M \leqslant r\} \end{aligned}$$

1. Montrer que $X_{\leqslant r}$ est fermé dans $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.
2. Montrer que X_r est ouvert et dense dans $X_{\leqslant r}$.

Exercice 75 (Rang et connexité)**.** On reprend les données et notations de l'exercice précédent. De plus, on prend $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

1. Montrer que $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.
2. Montrer que X_r est connexe par arcs.

Exercice 76 (Topologie des classes de similitude)**.** 1. Montrer qu'une classe de similitude est toujours d'intérieur vide.

2. Montrer que $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente si et seulement si 0 est dans l'adhérence de sa classe de similitude.
3. Quelles sont les matrices dont la classe de similitude est bornée ?
4. Montrer que $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable si et seulement si sa classe de similitude est fermée.

Exercice 77 (Semi-normes invariantes par similitude)**.** On se donne $n \geqslant 2$

1. Existe-t-il une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ invariante par similitude ?
2. Une *semi-norme* sur un espace vectoriel est une fonction qui vérifie les axiomes d'homogénéité et d'inégalité triangulaire (mais pas forcément de séparation). Montrer que toute semi norme invariante par similitude est de la forme
$$A \mapsto k\,|\text{tr } A|\,.$$

Exercice 78 (Classique — ENS —Simplicité de $\mathbf{SO}(3)$)**.** Si H est un sous-groupe de G, on dit que H est *distingué dans* G s'il est stable par toutes les conjugaisons [4] par les éléments de G. Le but de cet exercice est de montrer que les seuls sous-groupes distingués de de $\mathbf{SO}(3)$, le groupe des rotations de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, sont $\{I\}$ et $\mathbf{SO}(3)$ tout entier.

1. Montrer que les renversements (i.e., les rotations d'angle π) engendrent $\mathbf{SO}(3)$, et sont toutes conjuguées dans $\mathbf{SO}(3)$. En déduire que si H est distingué dans $\mathbf{SO}(3)$ et contient un renversement, alors $H = \mathbf{SO}(3)$.
2. On suppose que H est connexe par arcs et distingué dans $\mathbf{SO}(3)$. Montrer que $G = \{I\}$ ou bien $G = \mathbf{SO}(3)$. Quelle est la propriété du corps $\mathbb{R}$ que l'on a utilisée ?
3. On suppose que H est distingué dans $\mathbf{SO}(3)$, et soit H_0 la composante connexe de l'identité dans H. Montrer que H_0 est un sous-groupe distingué dans $\mathbf{SO}(3)$. Conclure. *On pourra raisonner par l'absurde, dans le cas où l'on aurait $H_0 = \{I\}$ et $H \neq \{I\}$, en utilisant que* $\mathbf{SO}(3)$ *est connexe par arcs.*
4. Quels sont les sous-groupes distingués de $\mathbf{O(3)}$?

---

4. $\forall g \in G, \forall h \in H, ghg^{-1} \in H$.

N. Suites et séries de fonctions (16 janvier)

Exercice 79 (Mines-Ponts). Soit f une fonction bornée de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} t^n f(t)$ converge uniformément sur $[0,1]$ si, et seulement si, f est dérivable en 1 et $f(1) = f'(1) = 0$.

Exercice 80. 1. Que dire d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle qu'il existe une suite (f_n) de fonctions polynôme qui converge vers f uniformément sur tout $\mathbb{R}$?

2. Que dire d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle qu'il existe une suite (f_n) de fonctions polynôme qui converge vers f uniformément *sur tout compact* de $\mathbb{R}$?

Exercice 81 (Une série de fonctions). Soit f la série de fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\arctan kt}{k^2}$$

1. Montrer que f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$, et de la classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^\star$
2. Montrer que f tend une limite réelle que l'on appellera ℓ au voisinage de $+\infty$, puis donner un équivalent de $f - \ell$ en $+\infty$.
3. Soit $\alpha > 0$; on note f_α la série partielle jusqu'au terme $k_t = \mathrm{E}\left(\alpha/t\right)$. Montrer que $f(t) \underset{0}{=} f_\alpha(t) + \mathcal{O}(t)$, puis encadrer f_α au voisinage de 0. En déduire un équivalent de f en 0.

Exercice 82 (Une série de fonctions alternée). Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right).$$

1. Donner le domaine de définition de f, étudier le caractère $\mathscr{C}^1$ de f sur ce domaine.
2. Donner un équivalent de f au voisinage de -1.
3. Montrer que $f'(x) = -\int_0^1 \frac{t^x}{1+t} dt$ et en déduire un développement asymptotique de f', puis un équivalent de f en$+\infty$.

Exercice 83 (Convergence simple et convergence uniforme). En général, la convergence uniforme entraîne la convergence simple, mais que la réciproque est fausse. On se propose d'étudier ici des réciproques partielles dans des contexte restreints. Soit donc (f_n) une suite de fonctions réelles continues qui converge simplement vers f sur $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$.

1. *Premier théorème de Dini* – On suppose que (f_n) est une suite croissante [5] et f continue sur I ; montrer que la convergence est uniforme. Que dire si $I = \,]a, b[$? Si f est non continue ?
2. *Equicontinuité* – On suppose qu'il existe une constante $C > 0$ telle que les f_n sont C-lipschitziennes ; montrer que la convergence est uniforme.
3. *Convexité* – On suppose que $I = \,]a, b[$ et que les f_n sont convexes ; montrer que la convergence est uniforme sur tous les $[\alpha, \beta] \subset I$.

---

5. Attention, ceci signifie et que les $n \mapsto f_n(x)$ sont croissantes, et non que les f_n sont croissantes.

O. Intégrales généralisées, intégrales à paramètre (23 janvier)

Exercice 84 (Condition d'intégrabilité). Pour quelle valeur du paramètre $\alpha > 0$ la fonction $x \mapsto xe^{-x^{\alpha}\sin^2 x}$ est-elle intégrable sur $\mathbb{R}_+$? **Madani**

Exercice 85 (Calcul de limites). Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \arctan(nx)\, e^{-x^n} dx; \tag{O.1}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{e^{-nx}}{\sqrt{x}}\right)(1 - \tanh(x^n))\, dx. \tag{O.2}$$

Exercice 86 (Calcul de séries). 1. Soient p et q deux réels > 0. Montrer que

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x^q} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{p+nq}.$$

2. En déduire les valeurs de

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n} \quad ; \quad I = \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^6} dt \quad ; \quad S' = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n^2+5n+3}.$$

Exercice 87 (Méthode de Laplace : un exemple). 1. Pour tout $x > 0$, montrer l'existence de $f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \frac{\sin xt}{t} dt$

2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ et calculer sa dérivée f'. En déduire que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\to} \frac{\pi}{2}$.

3. Notant $s(u) = \frac{\sin u}{u}$ et S la primitive de s nulle en 0, montrer que $f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} S(tx) dt$. En déduire

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du = \frac{\pi}{2}.$$

4. Adapter la méthode précédente pour calculer $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2} du$.

P. Séries entières (30 janvier)

Maggie

Exercice 88. Développer en série entière au voisinage de 0 la fonction $t \mapsto \ln\left(1+t+t^2\right)$. Quel est le rayon de convergence ?

Virgile

Exercice 89 (rayons de convergence)**.** Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R, avec $0 < R < +\infty$. Comparer à R les rayons de convergence des séries entières suivantes (α est un paramètre réel) :

$$\sum \alpha^n a_n z^n \quad ; \quad \sum n^\alpha a_n z^n \quad ; \quad \sum a_n^2 z^n \quad ; \quad \sum \frac{a_n}{n!} z^n \quad ; \quad \sum a_n e^{\sqrt{n}} z^n ;$$
$$\sum a_n z^{2n} \quad ; \quad \sum a_n z^{n^2}.$$

Sandra

Exercice 90 (Ecole polytechnique PC — Une série génératrice)**.** Soit la série entière $S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n$, où la suite (u_n) est définie par $u_0 = u_1 = 1$, et pour $n \geqslant 2$

$$u_n = u_{n-1} + 2u_{n-2} + (-1)^n .$$

1. Montrer que le rayon de convergence de la série entière est supérieur à $1/2$.
2. Calculer la somme de la série pour $|z| < 1/2$. Justifier a posteriori que le rayon de convergence était bien $1/2$.
3. En déduire une expression explicite de u_n en fonction de n.

Q. Séries de Fourier (6 février)

Exercice 91 (Mines-Ponts)**.** Soit $f \in \mathscr{C}^{\infty}_{2\pi}(\mathbb{R})$ telle que $f'(0) = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \theta \in \mathbb{R}, \left| f^{(n)}(\theta) \right| \leq 1.$$

Montrer que $f = \sin$.

Exercice 92 (Centrale-Supélec — Calcul de $\zeta(4)$)**.** 1. Trouver $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\int_0^{\pi} (at^4 + bt^2)\cos(nt)dt = \frac{(-1)^n}{n^4}.$$

pour tout $n \geqslant 1$.

2. En déduire les valeurs de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^4}$ et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$

Exercice 93 (Ecole polytechnique)**.** Développer en série de Fourier la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par **Vladislav**

$$f : x \mapsto \frac{1 + \cos x}{2 - \cos x}.$$

Exercice 94 (Adapté de Mines-Ponts — Equation fonctionnelle)**.** 1. *Oral Mines-Ponts.* Trouver toutes les fonctions $f \in \mathscr{C}^{2}_{2\pi}(\mathbb{R})$ telles que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = 2(\sin x) f'(x)$. **Jean-Loup**

2. Trouver toutes les fonctions $f \in \mathscr{C}^{1}_{2\pi}(\mathbb{R})$ telles que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = 2(\sin x) f'(x)$.

R. Calcul Différentiel I (13 février)

Paul N.

Exercice 95 (Jacobien des fonctions symétriques élémentaires)**.** Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ par $f = (\sigma_1, \dots \sigma_n)$ où les σ_i sont les fonctions symétriques élémentaires :

$$\sigma_k(x_1, \dots x_n) = \sum_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_k \leqslant n} x_{i_1} \cdots x_{i_k}.$$

Calculer le déterminant jacobien de f.

Pauline, Paul N

Exercice 96. Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\beta^2 > 4\alpha\gamma$, et $\alpha \neq 0$. Trouver toutes les fonctions f de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ telles que

$$\alpha \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \gamma \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

On pourra commencer par traiter le cas où $\beta = 0$ et $\alpha = -\gamma$, puis généraliser la démarche.

Thomas, Daniel

Exercice 97 (Fonctions homogènes et identité d'Euler)**.** Soit $n \geqslant 1$ un entier et f une fonction différentiable de $\mathbb{R}^n - \{0\}$ dans $\mathbb{R}$, k une constante réelle. On dit que f est homogène de degré k si pour tous $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, elle vérifie $f(tx) = t^k f(x)$. Montrer que f est homogène de degré k si et seulement si elle vérifie l'identité d'Euler, à savoir :

$$\forall x \neq 0 \quad \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = k f(x).$$

Mohammed, Mathilde

Exercice 98 (ENS 2002)**.** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $\frac{\|f(x)\|}{\|x\|} \underset{\|x\| \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Montrer que[6] $\nabla f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est surjective.

Exercice 99. Soit f une application de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. On suppose que f est telle que df est en tout point une similitude (ie, une homothétie $\times$ un orthogonal)

1. Dans le cas où $n = 2$, montrer que les fonctions composantes ont un laplacien nul.
2. Est-ce toujours le cas si $n = 3$? *On pourra penser à l'inversion* $x \to \frac{x}{\|x\|^2}$ *par rapport à la sphère.*
3. * *Question indépendante des précédentes.* On suppose de plus que df est à valeurs dans $\mathbf{O}(n)$. Montrer que f est une isométrie affine.

---

6. On rappelle que par définition $\nabla f(x)$ est l'unique vecteur tel que pour tout $v \in \mathbb{R}^2$, $df(x)(v) = \langle \nabla f(x) \mid v \rangle$

S. Calcul Différentiel II (6 mars)

Exercice 100. Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ qui est ρ-lipschitzienne avec $\rho < 1$ et $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ qui à (x,y) associe $(x+f(y), y-f(x))$. Montrer que φ est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. **Etienne**

Exercice 101 (Calcul de maximum)**.** Soit $n \geqslant 2$ un entier naturel ; on rappelle que **Rémi G.**

$$\sigma_2(x_1,\dots,x_n) = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j.$$

Déterminer (après avoir justifié son existence)

$$m := \max\left\{\sigma_2(x_1,\dots x_n) \mid (x_1,\dots,x_n) \in [0,1]^n, \sum_{i=1}^n x_i = 1\right\}.$$

Exercice 102 (Unicité dans le problème $\Delta f = f$ dans un ouvert borné avec condition au bord)**.** Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ et $\omega \in \Omega$. **Victor, Mathieu**

1. Montrer que
$$\int_0^{2\pi} f(\omega_1+\rho\cos\theta, \omega_2+\rho\sin\theta)\,d\theta = 2\pi f(\omega) + \frac{\pi\rho^2}{2}\Delta f(\omega) + o\left(\rho^2\right).$$
2. On suppose que $\Delta f \geq f$ et que f présente un maximum. Montrer que $f \leq 0$.
3. On suppose que Ω est borné et on note Γ sa frontière. On se donne $g \in \mathscr{C}^0(\Gamma,\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe au plus une fonction h de $\overline{U}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ telle que $\Delta h = h$ et $h_{|\Gamma} = g$. L'existence est-elle garantie ?

Exercice 103. Soit E un espace euclidien et $f : E \to E$ de classe $\mathscr{C}^1$, $\alpha > 0$ vérifiant

$$\forall x,h \in E,\ \langle df_x(h) \mid h\rangle \geq \alpha\|h\|^2$$

1. Montrer que pour tous $x,y \in E$,$\langle f(x)-f(y) \mid x-y\rangle \geq \alpha\|x-y\|^2$. En déduire que $f(E)$est fermé dans E.
2. Montrer que $f(E)$ est ouvert dans E puis que f est un $\mathscr{C}^1$- difféomorphisme de E.

Exercice 104 (ENS)**.** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ et D le disque unité fermé. On suppose que $f(x,y) = y^2 - x^2$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2\backslash D$. Montrer que f admet un point critique. **Johanna**

Indications : Le point critique est forcément dans D, donc on peut se concentrer sur le comportement de f (et plus précisément de ∇f...) au voisinage du cercle unité. On pourra utiliser un relèvement : si $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}^\star$ est de classe $\mathscr{C}^1$, alors il existe $\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $u(x) = e^{\alpha(x)}$, puis démontrer ce lemme à partir du théorème de relèvement au programme.

T. Intégrales multiples et formes différentielles (13 mars)

Maggie, Auriane

Exercice 105 (CCP)**.** Soit $a \neq 0$. Calculer sur le domaine

$$\mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq y \leq x \leq b\right\},$$

l'intégrale

$$I(b) = \iint_{\mathcal{D}} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(a^2+x^2+y^2)^{3/2}}.$$

Etudier la limite de cette intégrale quand b tend vers $+\infty$.

Virgile, Benjamin

Exercice 106 (Mines-Ponts)**.** Montrer la bonne définition et trouver un équivalent quand $t \to +\infty$ de

$$f(t) = \iint_{[0,t]^2} \frac{e^x - e^y}{x-y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Sandra, Auriane

Exercice 107 (Contraposée du théorème de Fubini)**.** Soit $f(x,y) = \frac{x-y}{(1+x+y)^3}$ définie sur $\mathbb{R}_+$

1. Montrer que f n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+^2$
2. Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} f(x,y)\,dx\right) dy \neq \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} f(x,y)\,dy\right) dx$$

   Retrouver le résultat de la question précédente

Raphaël

Exercice 108 (** Le premier nombre de Betti via la cohomologie de de Rham)**.** Dans cet exercice, on note $\Omega^1(W)$ l'espace vectoriel des formes différentielles $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert W de $\mathbb{R}^2$. On rappelle que ω est dite fermée si $\partial_x \omega_y = \partial_y \omega_x$.

1. Soit $\varphi \in \mathscr{C}^1(U,V)$, où U et V sont deux ouverts de $\mathbb{R}^2$. On pose, pour tout $\omega \in \Omega^1(V)$,

$$\forall x \in U, \forall v \in \mathbb{R}^r,\ (\varphi^\star \omega)_x(v) := \omega_{\varphi(x)}(d\varphi(x)(v))$$

   Montrer que $\varphi^\star \in \mathcal{L}\left(\Omega^1(V), \Omega^1(U)\right)$ puis que si U et V sont difféomorphes, alors $\Omega^1(U)$ et $\Omega^1(V)$ sont isomorphes.
2. Soit $f \in \mathscr{C}^2(V,\mathbb{R})$. Montrer que $\varphi^\star df = d(\varphi \circ f)$ et que si ω est fermée, alors $\varphi^\star \omega$ aussi.
3. En déduire que $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ ne sont pas difféomorphes. *On pourra utiliser le lemme de Poincaré : si U est un ouvert étoilé de $\mathbb{R}^2$ et ω une forme différentielle $\mathscr{C}^1$ fermée sur U, alors il existe $f \in \mathscr{C}^2(U,\mathbb{R})$, unique à une constante près, telle que $\omega = df$.*
4. Soit $Z = \{z_1, \dots z_r\}$ une partie de $\mathbb{R}^2$; on note ω_i la forme[7] « $d\theta_i$ » différentielle de l'angle autour de z_i. Montrer que pour tout $\omega \in \Omega\left(\mathbb{R}^2 \backslash Z\right)$ fermée, il existe un unique r-uple $(\lambda_1, \dots \lambda_r) \in \mathbb{R}^r$ tel que $\omega - \sum_{i=1}^r \lambda_i \omega_i$ s'écrit sous la forme df, avec $f \in \mathscr{C}^2\left(\mathbb{R}^2 \backslash Z, \mathbb{R}\right)$.
5. En déduire que pour Z_1 et Z_2 des parties finies de $\mathbb{R}^2$, on a que $\mathbb{R}^2 \backslash Z_1$ et $\mathbb{R}^2 \backslash Z_2$ sont difféomorphes si et seulement si $|Z_1| = |Z_2|$. *Pour le sens indirect on pourra remarquer que l'on peut supposer que les points de Z_1 sont d'abscisse distinctes.*

---

7. Ecrire $d\theta_i$ pour la forme ω_i est un léger abus de notation car θ_i n'est pas une fonction à proprement parler, elle est seulement définie modulo 2π. Cette forme s'explicite, avec $r_i^2 = (x-x_i)^2 + (y-y_i)^2$, par

$$\omega_i = \frac{y-y_i}{r_i^2} dx - \frac{x-x_i}{r_i^2} dy.$$

U. Equations différentielles linéaires (20 mars)

Exercice 109 (EDL scalaires d'ordre 1)**.** Trouver toutes les solutions des équations suivantes

(a): $xy' + y = e^x$ sur $\mathbb{R}$

(b): $xy' + 2y = \frac{x^2}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$

(c): $2xy' + y = \frac{1}{1-x}$ sur $]-\infty, 1[$

Exercice 110 (Mines-Ponts 2010 — Etude de $y'' - y = f$)**.** Soit $E = \mathscr{C}_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues et bornées sur $\mathbb{R}$, et E_2 le sous-espace de E formé des fonctions de classe $\mathscr{C}^2$.

1. Soit $f \in E$. Montrer que l'équation
$$y'' - y = f \quad (\mathcal{E})$$
possède une unique solution, qui est dans E_2. On note $\Phi(f)$ cette solution.
2. On munit E et E_2 de la norme uniforme sur $\mathbb{R}$. Montrer que Φ est un endomorphisme linéaire continu de E dans E_2. Calculer sa norme subordonnée ; donner ses valeurs propres et ses fonctions propres. Montrer que Φ est injectif ; est-il surjectif ?

Exercice 111 (Ecole polytechnique)**.** 1. Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose, pour tout $t \in [0,1]$, $\phi(t) = e^{tA}e^{tB}e^{-t(A+B)}$. Montrer que **Arnaud**
$$\phi'(t)\phi(t)^{-1} = e^{tA}\left(A - e^{tB}Ae^{-tB}\right)e^{-tA}.$$

2. On suppose dorénavant que $[A,[A,B]] = [B,[A,B]] = 0$. Montrer que
$$A - e^{tB}Ae^{-tB} = t\,[A,B]$$
3. En déduire, toujours sous l'hypothèse $[A,[A,B]] = [B,[A,B]] = 0$, que
$$e^Ae^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]}$$
On pourra montrer que $\tilde{\phi}(t) = \exp\left(\frac{t^2}{2}[A,B]\right)$ *vérifie le même problème de Cauchy que* ϕ *avec même condition initiale.*

Exercice 112 (*)**.** On s'intéresse à certains systèmes linéaires dont les coefficients sont non constants.

1. Soient a, b, c des fonctions scalaires $\mathscr{C}^0$ sur $\mathbb{R}$, et $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$. Résoudre l'équation
$$\left|\begin{array}{lcll} x' & = & ax+by+cz & x(0) = x_0 \\ y' & = & cx+ay+bz & y(0) = y_0 \\ z' & = & bx+cy+az & z(0) = z_0. \end{array}\right.$$
2. Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, $A \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathcal{A})$ et R la résolvante [8] associée au système $X' = AX$ entre 0 et t. Montrer que
$$R(t) = I_p + \sum_{n=1}^{+\infty} \int\!\!\cdots\!\!\int_{0 \le t_1 \le \ldots \le t_n \le t} A(t_n)\,A(t_{n-1})\ldots A(t_1)\,\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\ldots\mathrm{d}t_n.$$
3. Que dire si $\mathcal{A}$ est commutative ? Retrouver le résultat de la première question.

Cet exercice est corrigé page 35.

---

8. On rappelle que par définition, $R(t)$ est la matrice de $\mathbf{GL}_p(\mathbb{R})$ telle que pour tout $X_0 \in \mathbb{R}^p$ condition initiale $X(t) = R(t)\,X(0)$

Corrections de certains exercices

Correction de l'exercice 11.

1. Si $(x,y,z) \in S$ alors $xyz \neq 0$ (p est premier), donc $x,y,z \geqslant 1$. Il s'ensuit que $p = x^2 + 4yz \geqslant \max(x,y,z)$, d'où $S \subset \{1,\dots p\}^3$ et c'est donc un ensemble fini. De plus, comme p est congru à 1 modulo 4, on a un élément de S en posant
$$x = 1,\ y = 1,\ z = \frac{p-1}{4}$$
Donc S est non vide.
2. Montrons que f est bien définie :
$$x = y - z \implies p = x^2 + 4yz = (y+z)^2$$
$$x = 2y \implies p = x^2 + 4yz = 4y(y+z)$$
Dans les deux cas c'est absurde, car p est premier. On a donc bien la disjonction de cas demandée. Vérifions déjà que f est à valeurs dans S : pour tous $(x,y,z) \in S$ on a bien que
$$\begin{array}{rcl} (x+2z)^2 + 4z(y-x-z) & = & x^2 + 4z^2 + 4xz + 4yz - 4xz - 4z^2 = x^2 + 4yz = p \\ (2y-x)^2 + 4y(x-y+z) & = & 4y^2 + x^2 - 4xy + 4xy - 4y^2 + 4yz = x^2 + 4yz = p \\ (x-2y)^2 + 4(x-y+z)y & = & x^2 + 4y^2 - 4xy + 4xy - 4y^2 + 4yz = x^2 + 4yz = p \end{array}$$
A présent, recherchons un point fixe ; il s'agit de résoudre les trois équations
$$\begin{array}{rcll} (x,y,z) & = & (x+2z, z, y-x-z) & (\mathcal{E}_1) \\ (x,y,z) & = & (2y-x, y, x-y+z) & (\mathcal{E}_2) \\ (x,y,z) & = & (x-2y, x-y+z, y) & (\mathcal{E}_3) \end{array}$$
Les équations $(\mathcal{E}_1)$ et $(\mathcal{E}_3)$ donnent respectivement $z = 0$ et $y = 0$, ce qui est absurde d'après ce qui précède. L'équation $(\mathcal{E}_2)$ donne $x = y$ et z quelconque ; la condition d'appartenance à S s'écrit alors
$$p = x^2 + 4yz = x(x+4z)$$
Comme p est premier et $z \geqslant 1$, $x+4z > x$ et donc (par unicité de la décomposition de p) $x = 1$ et $z = \frac{p-1}{4}$; il s'agit d'une solution unique et c'est l'élément exhibé à la question précédente. Il nous reste à montrer que f est involutive ; pour cela on introduit les parties suivantes
$$S_1 := \{(x,y,z) \in S \mid x < y - z\}$$
$$S_2 := \{(x,y,z) \in S \mid y - z < x < 2y\}$$
$$S_3 := \{(x,y,z) \in S \mid x > 2y\}$$
Un peu d'observation montre que f envoie S_1 sur S_3, S_3 sur S_1 et S_2 sur lui-même. Il nous reste donc seulement 3 cas (au lieu de 9) à disjoindre pour le calcul de f^2. En posant $(x',y',z') = f(x,y,z)$, on écrit ces trois cas
$$\begin{array}{lrcl} (x,y,z) \in S_1 & f(x',y',z') & = & (x'-2y', x'-y'+z', y') \\ & & = & (x+2z-2z, x+2z-z+y-x-z, z) \\ & & = & (x,y,z) \\ (x,y,z) \in S_2 & f(x',y',z') & = & (2y'-x', y', x'-y'+z') \\ & & = & (2y-(2y-x), y, 2y-x-y+x-y+z) \\ & & = & (x,y,z) \\ (x,y,z) \in S_3 & f(x',y',z') & = & (x'+2z', z', y'-x'-z') \\ & & = & (x-2y+2y, y, x-y+z-x+2y-y) \\ & & = & (x,y,z) \end{array}$$

Donc f est bien une involution. En particulier, c'est une bijection (elle est injective et surjective). Soit

$$S_f = \{(x, y, z) \in S \mid f(x, y, z) \neq (x, y, z)\} = S - \left\{\left(1, 1, \frac{p-1}{4}\right)\right\}$$

Alors S_f (le support de f) est stable par f ; on peut donc le partitionner en paires disjointes $\{(x, y, z), f(x, y, z)\}$ et comme S_f est fini, il est de cardinal pair. Donc S est de cardinal impair.

3. Comme y et z joue les mêmes rôles dans l'équation, g est à valeurs dans S. De plus, c'est clairement une involution. Par le même argument que précédemment, son support S_g est de cardinal pair. Mais comme $|S|$ est impair, on a que $S_g \subsetneq S$, et g admet un point fixe (x_0, y_0, z_0) tel que $y_0 = z_0$. Ceci donne

$$p = x_0^2 + 4y_0^2 = x_0^2 + (2y_0)^2$$

Donc p est somme de deux carrés.

Cette preuve est remarquable car elle ne demande absolument aucune arithmétique modulaire.

Correction de l'exercice 18. Soit G un groupe tel que $\operatorname{Aut}(G)$ est trivial. En particulier, pour tout $g \in G$, l'*automorphisme intérieur* $x \mapsto gxg^{-1}$ est l'identité. Par conséquent G est commutatif ; on notera sa loi sous forme additive. Maintenant, dans un groupe commutatif, on dispose du morphisme d'inversion

$$\iota : x \mapsto -x$$

Dans notre groupe il doit être égal à l'identité, c'est donc que tous les éléments sont d'ordre 2. On peut donc munir G d'une structure de $\mathbb{F}_2$-espace vectoriel en posant $\lambda g = g$ si $\lambda = 1$ ou 0_G si $\lambda = 0$ cette loi externe respecte l'addition :

$$g + g = 0_G = 0 \cdot g$$

Supposons par l'absurde que G est de cardinal (au sens large) plus grand que 3. Alors il existe g et h dans G distincts et distincts du neutre ; si G' est un supplémentaire de $\langle g, h\rangle$ dans G alors $G = \langle g, h\rangle \oplus G'$. On définit alors $\tau : G \to G$ tel que $\tau(g) = h$, $\tau(h) = g$ et $\forall g' \in G'$, $\tau(g') = g'$. Cet automorphisme se prolonge à G et il est non trivial, on en déduit une contradiction. En conclusion, G **est trivial ou bien** $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Correction de l'exercice 20.

1. Remarquer que tous les sous-groupes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont monogènes. Alice a donc gagné si G possède un sous-groupe H maximal[9] de cardinal impair, ce qui est le cas si n est impair ou si $n \equiv 2 \pmod 4$, en jouant x tel que $\langle x\rangle = H$ a son premier coup. Si $4 \mid n$, remarquer que Bob va pouvoir engendrer au deuxième coup un sous-groupe maximal d'ordre pair.

2. Soit g_i l'élément choisi au i-ième coup ; ainsi A choisi les g_{2i+1} et B les g_{2i}. On note $G_j = \langle g_1, \ldots, g_n\rangle$ le groupe engendré par les g_i pour $1 \leqslant i \leqslant j$, et N le coup de terminaison, à savoir l'entier tel que $G_N = \mathcal{S}_n$ et $G_{N-1} \neq \mathcal{S}_N$. N existe car $\mathcal{S}_N$; en outre il est majoré par $n!$. Examinons dans un premier temps les petits cas.
   – Si $n = 2$, Alice joue l'identité et Bob a perdu ; – Si $n = 3$, Alice joue le 3-cycle

9. Le sous-groupe strict $H \subset G$ est maximal si pour tout H' sous-groupe de G contenant H on a $G = H'$ ou $H = H'$

(1 2 3) qui engendre[10] $\mathcal{A}_3$. Comme $|\mathcal{A}_3| = 3$, Alice peut forcer Bob a être le premier à jouer en dehors de $\mathcal{A}_3$, et donc à perdre.
On voit que ce dernier cas repose de manière cruciale sur l'imparité du cardinal du groupe alterné dans $\mathcal{S}_3$. Ceci n'est plus vrai dés que $n \geqslant 4$ et peut nous suggérer que cette stratégie ne fonctionne plus. D'après le théorème de Lagrange $|G_j| \mid |G_{j+1}|$pour tout j durant le jeu. A présent, il convient de remarquer que s'il existe j_0 tel que $|G_{j_0}|$ est pair et $G_{j_0} \neq \mathcal{S}_n$, alors B a gagné. En effet, Bob peut alors forcer Alice à être le premier à jouer en-dehors de G_{j_0} , au plus tard au coup $|G_{j_0}| + 1$, en jouant systématiquement dans G_{j_0}. Alice remplace alors G_{j_0} par G_{j_1} toujours de cardinal pair, mais strictement plus grand, et sera forcée par Bob à jouer encore le premier en dehors de ce groupe... Finalement, Bob remporte la partie.
Prenons à présent $n \geqslant 4$ et examinons la stratégie que B peut suivre :
– Si g_1 est d'ordre pair, G_1 est de cardinal pair et B a gagné.
– Si g_1 est d'ordre impair $d \geqslant 3$, c'est un produit de cycles disjoints $g_1 = c_1 \dots c_r$ qui sont tous de longueur impaire ; on a donc $\epsilon(g_1) = 1$. Bob choisit alors un autre élément de $\mathcal{A}_n$, d'ordre pair (donc pas dans l'orbite de g_1), par exemple (1 2)(3 4) ; ce qui est possible dés que $n \geqslant 4$. On a alors $2 \mid |G_2|$ et B a gagné.
– Si g_1 est l'identité, Bob choisit n'importe quelle permutation d'ordre pair, par exemple (1 2).

Conclusion, Alice possède une stratégie gagnante si $n \in \{2, 3\}$; sinon, c'est Bob qui possède une stratégie gagnante.

Correction de l'exercice 42. Commençons par traiter le cas $\alpha = 0$. La bonne définition de la série résulte de ce que $\pi \notin \mathbb{Q}$. Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ il existe une fonction strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $\cos\varphi(n) \to -1$. On a alors

$$\frac{1}{1 + \cos\varphi(n)} \to +\infty,$$

donc la série est (très) grossièrement divergente. On peut dorénavant supposer $\alpha > 0$.
1er cas : $\alpha > 1$. On a alors $\frac{1}{n^\alpha + \cos n} \sim \frac{1}{n^\alpha}$ et la série est alors absolument convergente, par le critère de Riemann.
2e cas : $\alpha > \frac{1}{2}$. Il n'y a plus de convergence absolue, mais on se ramène à une série à termes alternés, à une série absolument convergente près, de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{n^\alpha + \cos n} &= \sum_{n=1}^{N} (-1)^n \left[\frac{1}{n^\alpha} + \frac{1}{n^\alpha + \cos n} - \frac{1}{n^\alpha}\right] \\ &= \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{n^\alpha} - \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n \cos n}{n^\alpha (n^\alpha + \cos n)}\end{aligned}$$

La première série est convergente par le critère spécial des séries alternées, la seconde est absolument convergente par le critère de Riemann car

$$\frac{\cos n}{n^\alpha (n^\alpha + \cos n)} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right).$$

Au total la série est donc encore convergente.

10. Remarquer que $\mathcal{S}_3$ est le groupe dihédral d'ordre 3, c'est-à-dire le groupe des isométries du triangle équilatéral. $\mathcal{A}_3$ est le groupe des isométries positives du triangle équilatéral, à savoir des rotations ; il est donc cyclique. En plus grande dimension $\mathcal{S}_n$ est encore le groupe d'isométries d'un polytope convexe appelé simplexe régulier (voir les chapitres de géométrie) ; et $\mathcal{A}_n$ son groupe de rotation, mais ce dernier n'est plus cyclique, ni même commutatif.

3e cas : $\alpha > \frac{1}{3}$. Par ce qui précède on est ramené à étudier la convergence de $\sum \frac{(-1)^n \cos n}{n^\alpha (n^\alpha + \cos n)}$. Pour cela, on approxime très bien le terme général par $(-1)^n \frac{\cos n}{n^{2\alpha}}$:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n \cos n}{n^\alpha (n^\alpha + \cos n)} &= \sum_{n=1}^{N} (-1)^n \left[\frac{\cos n}{n^{2\alpha}} + \frac{\cos n}{n^\alpha (n^\alpha + \cos n)} - \frac{\cos n}{n^{2\alpha}}\right] \\
&= \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n \cos n}{n^{2\alpha}} \\
&\quad + \sum_{n=1}^{N} (-1)^n \frac{n^{2\alpha} \cos n - n^\alpha (n^\alpha + \cos n) \cos n}{n^{3\alpha} (n^\alpha + \cos n)} \\
&= \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n \cos n}{n^{2\alpha}} - \sum_{n=1}^{N} (-1)^n \frac{\cos^2 n}{n^{2\alpha} (n^\alpha + \cos n)}.
\end{aligned}$$

La dernière série est absolument convergente par le critère de Riemann, car

$$\frac{\cos^2 n}{n^{2\alpha} (n^\alpha + \cos n)} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{3\alpha}}\right);$$

pour l'autre on effectue la transformation d'Abel :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n \cos n}{n^{2\alpha}} &= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{2\alpha}} \left[\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \cos k - \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \cos k\right] \\
&= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{2\alpha}} \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \cos k - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{2\alpha}} \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \cos k \\
&= \frac{1}{N^{2\alpha}} \sum_{k=1}^{N} (-1)^k \cos k - 0 \\
&\quad + \sum_{n=1}^{N-1} \left(\frac{1}{n^{2\alpha}} - \frac{1}{(n+1)^{2\alpha}}\right) \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \cos k.
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}^\star, \ \left|\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \cos k\right| &= \left|\mathfrak{Re}\left[\sum_{k=1}^{n} e^{ik(1+\pi)}\right]\right| \\
&= \left|\mathfrak{Re}\left[\frac{1 - e^{i(k+1)(1+\pi)}}{1 - e^{i(1+\pi)}}\right]\right| \\
&\leq \frac{2}{\left|1 - e^{i(1+\pi)}\right|},
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N-1} \left|\left(\frac{1}{n^{2\alpha}} - \frac{1}{(n+1)^{2\alpha}}\right) \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \cos k\right| &\leq \frac{2}{\left|1 - e^{i(1+\pi)}\right|} \sum_{n=1}^{N-1} \left|\frac{1}{n^{2\alpha}} - \frac{1}{(n+1)^{2\alpha}}\right| \\
&= \frac{2}{\left|1 - e^{i(1+\pi)}\right|} \left(1 - \frac{1}{N^{2\alpha}}\right),
\end{aligned}$$

ce qui donne $\sum \frac{(-1)^n \cos n}{n^{2\alpha}}$ convergente.

Cas général. Les trois cas précédents nous suggèrent une stratégie qui est l'indication donnée par l'énoncé : on décompose

$$\frac{1}{n^\alpha + \cos n} = \frac{1}{n^\alpha} \frac{1}{\left(1 + \frac{\cos n}{n^\alpha}\right)}.$$

Comme $|\cos n| \leq 1 \leq n^{\alpha}$, nous sommes dans les conditions d'application du

Lemme. *pour tout x vérifiant $|x| < 1$, et $k \in \mathbb{N}$*

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^k \frac{x^k}{1+x}.$$

Démonstration. En effet [11]

$$\begin{aligned}(1+x)\left(1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^k \frac{x^k}{1+x}\right) &= 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^k \frac{x^k}{1+x} \\ &\quad +x - x^2 + \cdots - (-1)^k x^k + (-1)^k \frac{x^{k+1}}{1+x} \\ &= 1 + (-1)^k x^k \left[\frac{1}{1+x} - 1\right] + (-1)^k \frac{x^{k+1}}{1+x} \\ &= 1 + (-1)^k x^k \left[\frac{1}{1+x} - 1 + \frac{x}{1+x}\right] \\ &= 1. \quad \square\end{aligned}$$

On prend donc $\alpha > 0$; puis k un entier tel que $\frac{1}{k} < \alpha$, et on écrit la série de l'énoncé sous la forme

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{n^{\alpha} + \cos n} = \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{n^{\alpha}} + \sum_{j=1}^{k-2} (-1)^j \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n \cos^j n}{n^{(j+1)\alpha}} \\ + (-1)^{k-1} \sum_{n=1}^{N} (-1)^n \frac{\cos^{k-1} n}{n^{(k-1)\alpha}(n^{\alpha} + \cos n)}.\end{aligned}$$

La première série est convergente par le critère spécial, la dernière absolument convergente par le critère de Riemann car son terme général s'écrit

$$(-1)^n \frac{\cos^{k-1} n}{n^{(k-1)\alpha}(n^{\alpha} + \cos n)} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{k\alpha}}\right), \ \alpha k > 1.$$

Voyons comment les $k-2$ séries du milieu peuvent se traiter par transformation d'Abel. Pour tout j on sait que $x \mapsto \cos^j x$ est un polynôme en les $x \mapsto \cos mx$, $m \leqslant j$ (pour s'en apercevoir développer $\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^j$ avec le binôme de Newton. Par linéarité il suffit donc en fait de montrer que pour tout m la série

$$S_{j,m}(N) := \sum_{n=1}^{N} (-1)^n \frac{\cos(mn)}{n^{(j+1)\alpha}}$$

converge. On obtient cela par simple transformation d'Abel et en exploitant $\pi \notin \mathbb{Q}$:

11. On peut aussi utiliser la formule de Taylor avec reste intégral, qui explique peut-être un peu mieux pourquoi cette forme apparaît.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n \cos mn}{n^{(j+1)\alpha}} &= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{(j+1)\alpha}} \left[\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \cos mk - \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \cos mk\right] \\
&= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{(j+1)\alpha}} \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \cos mk - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{(j+1)\alpha}} \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \cos mk \\
&= \frac{1}{N^{(j+1)\alpha}} \sum_{k=1}^{N} (-1)^k \cos mk - 0 \\
&\quad + \sum_{n=1}^{N-1} \left(\frac{1}{n^{(j+1)\alpha}} - \frac{1}{(n+1)^{(j+1)\alpha}}\right) \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \cos mk.
\end{aligned}$$

Or (par irrationalité de π) $m\left(1+\frac{\pi}{m}\right) \notin \pi\mathbb{Z}$, donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad \left|\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \cos mk\right| = \left|\mathfrak{Re}\left[\sum_{k=1}^{n} e^{imk\left(1+\frac{\pi}{m}\right)}\right]\right| \leq \frac{2}{\left|1-e^{im\left(1+\frac{\pi}{m}\right)}\right|}.$$

Conclusion. **Il y a convergence si et seulement si** $\alpha > 0$.

Correction de l'exercice53.

1. Supposons que K engendre E. Soit $(u_n) \in \mathcal{K}^{\mathbb{N}}$. Alors $u_n(K) \subset K$ pour tout n. Soit $\mathscr{K} = (k_1, \dots k_d)$ une base de E contenue dans K. Alors K^d étant compact, quitte a extraire on peut supposer pour tout $j \in \{1 \dots d\}$
$$u_n(k_j) \to \tilde{k}_j,$$
où $\tilde{k}_j \in K$. Maintenant, posons $\tilde{u}$ tel que $\tilde{u}(k_j) := \tilde{k}_j$. On vérifie immédiatement que $u_n \to \tilde{u}$, et $\tilde{u} \in \mathcal{K}$.
Réciproquement, supposons que K engendre $F \subsetneq E$. Soit $(f_1, \dots f_r)$ une base de F contenue dans K compétée en $\mathscr{F} = (f_1, \dots f_d)$ une base de E. On prend la suite d'endomorphisme (u_n) dont la matrice dans $\mathscr{F}$ est
$$[u_n]_{\mathscr{F}} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & nI_{d-r} \end{pmatrix}.$$
Alors clairement $u_n \in \mathcal{K}$. Pourtant$|||u_n||| = n$ pour la norme subordonnée à la norme infinie. Donc $\mathcal{K}$ est non borné, donc non compact.
2. Si K contient un ouvert ω_0 qui contient 0 alors il est immédiat que K engendre E (prendre une base $\mathscr{B}$ quelconque, et montrer que $\epsilon\mathscr{B}$ est contenue dans ω pour ϵ assez petit). On a donc que $\mathcal{K}$ est compact d'après la question précédente. Donc la fonction det, qui est continue, y est bornée par $M \geq 0$. Reste à montrer $M \leq 1$.
Intuitivement, un endomorphisme de déterminant $\delta > 1$ « dilate » l'espace dans le sens ou il augmente les volumes d'un facteur δ et ne peut donc pas faire rentrer K dans K (voir figure suivante).
Le volume fait malheureusement partie des notions intuitivement simples et mathématiquement compliquées, pour les sous-ensembles généraux. Toutefois, il est facile de le définir pour les d-uplets de vecteurs. Soit donc $\mathscr{B}$ une base de E et
$$\begin{aligned} \delta : K^d &\to \mathbb{R} \\ (e_1, \dots e_d) &\mapsto \left|\det_{\mathscr{B}}(e_1, \dots e_d)\right| \end{aligned}$$

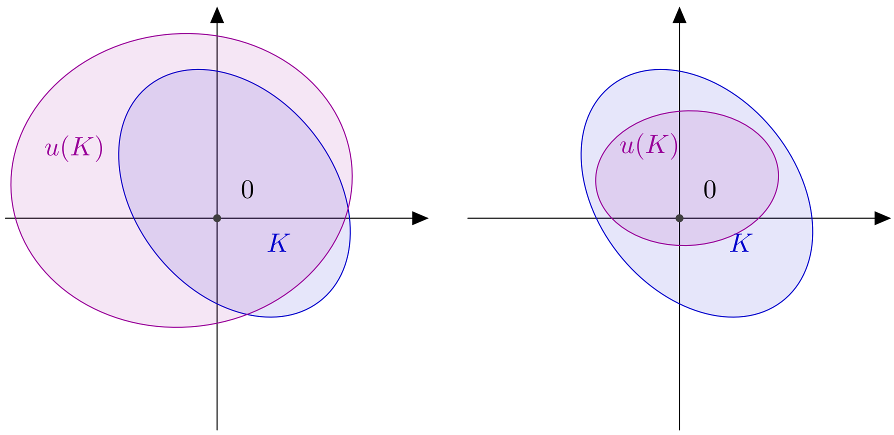

FIGURE U.1. Illustration avec $E = \mathbb{R}^2$. Si $u(K) \subset K$ alors $|\det u| \leq 1$

δ est continue, sur le compact K^d et prend des valeurs > 0 (par hypothèse) ; elle atteint donc son maximum D en une certaine base

$$\mathscr{M} = (m_1, \dots m_d) \in K^d$$

Maintenant, soit $u \in \mathcal{K}$. Il envoie K dans K par hypothèse, donc la famille $\mathscr{M} = (m_1, \dots m_d)$ sur une famille $\mathscr{N}$ dont l'image par δ est $D' \leq D$ plus petit. Donc

$$|\det u| = \det_{\mathscr{M}} \mathscr{N} = \left(\det_{\mathscr{B}} \mathscr{N}\right)\left(\det_{\mathscr{M}} \mathscr{B}\right) = \frac{D'}{D} \leq 1.$$

Correction de l'exercice 59.

1. Soit M tel que $f^{(k)}(x) \neq 0$ pour tout $x \geq M$. On peut supposer $f^{(k)} > 0$ à droite de M. Ainsi, $f^{(k-1)}$tend vers une limite ℓ au voisinage de $+\infty$. Déjà $\ell \neq \pm\infty$ sinon f tendrait vers $\pm\infty$. Si par l'absurde $\ell \neq 0$ alors on montre facilement que $f \to \pm\infty$, le signe étant celui de ℓ. Donc $f^{(k-1)} \to 0$ au voisinage de $+\infty$.
   Maintenant, par le lemme de Rolle, $f^{(k-1)}$ admet un nombre fini de zéros. On peut donc appliquer le raisonnement précédent pour trouver que $f^{(k-2)}, \dots f^{(k-3)}, \dots f'$ tendent vers 0 au voisinage de $+\infty$.
   On peut faire un raisonnement très similaire au voisinage de $-\infty$.
2. C'est immédiat pour $k = 2$ (une fonction convexe bornée sur $\mathbb{R}$ est constante). Soit maintenant $k \geqslant 3$ et supposons par l'absurde que $f^{(k)}$ s'annule r fois seulement, où $r < k-1$. Alors montrons que $f^{(k-1)}$ s'annule au plus $r-1$ fois, ce qui permettra de conclure par récurrence. En effet, si $f^{(k-1)}$s'annule r fois, on peut numéroter $z_1 < z_2 < \cdots < z_r$ une suite de ses zéros. Quitte à apliquer le lemme de Rolle entre $-\infty$ et z_1 d'une part, entre z_r et $+\infty$ d'autre part, et entre z_i et z_{i+1} on trouve que $f^{(k)}$ s'annule r fois.
3. On peut penser à $f(x) = \arctan x$. On vérifie en effet sans difficulté par récurrence que
$$f^{(k)}(x) = \frac{P_k(x)}{(1+x^2)^k}$$
   où $\deg P_k(x) = k-1$. Les zéros de $f^{(k)}$ sont ceux de P_k, il y en a au plus $k-1$ (par degré) et au moins $k-1$ (par la question précédente) donc exactement $k-1$.

Correction de l'exercice 78.

1. Soit $r_{\vec{u}}(\theta)$ la rotation d'angle θ et d'axe $\vec{u}$, où u est un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^3$. Alors $r_{\vec{u}}(\theta)$ est a composée de deux réflexions s_π et $s_{\pi'}$, où π et π' sont des plans tels que $\mathbb{R}\vec{u} = \pi \cap \pi'$. Soit $s = s_{\vec{u}^\perp}$ la réflexion de plan $\vec{u}^\perp$. Alors s commute à $r_{\vec{u}}(\theta)$, et $s \circ s_\pi$, $s_{\pi'} \circ s$ sont des retournements. Donc
$$s \circ s_\pi \circ s_{\pi'} \circ s = s \circ r_{\vec{u}}(\theta) \circ s^{-1} = r_{\vec{u}}(\theta).$$
Que les renversements soient tous conjugués dans $\mathbf{SO}(3)$ relève du *principe de conjugaison.*
2. D'après ce qui précède il suffit de montrer que H contient un renversement. A cet effet considérons $\tau : H \to \mathbb{R}$ qui à r associe $\operatorname{Tr} r = 1 + 2\cos\theta$, où θ est un angle de r. Si H est non trivial alors $\underline{\tau} := \inf \tau < 3$. Mais comme H est connexe par arcs et τ est continue, $\tau(H)$ contient $]\underline{\tau}, 3]$. En particulier il existe n assez grand tel que $\tau(H) \ni 1 + 2\cos(\pi/n)$. Soit alors $h \in H$ tel que $\tau(h) = 1 + 2\cos(\pi/n)$. H est une rotation d'angle π/n, donc h^n est un renversement.
3. La composante connexe (par arcs) de l'identité est connexe par arcs par définition. Il s'agit de montrer que c'est un sous-groupe distingué dans $\mathbf{SO}(3)$ de manière à pouvoir appliquer la question précédente.
H_0 **est un sous-groupe de** H **:** Soient h, h' deux éléments de H_0. Il existe des chemins dans H_0, $\{h_s\}_{s\in[0,1]}$ et $\{h'_s\}_{s\in[0,1]}$ tels que $h_0 = h'_0 = 1$, $h_1 = h$, $h'_1 = h'$ et $s \mapsto h_s$ est continue (de même $s \mapsto h'_s$). Posons
$$h''_t = \begin{cases} h_{2t} & 0 \leqslant t \leqslant 1/2 \\ hh'_{2t-1} & 1/2 \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$
Alors $\{h''_s\}$ réalise un chemin continu de 1 à hh' contenu dans H_0, donc $hh' \in H_0$. De même $\{h^{-1}h_{1-s}\}$ réalise un chemin continu contenu dans H_0 de 1 à h^{-1}. Donc $h^{-1} \in H$.
H_0 **est distingué** Soit $h \in H_0$ et $g \in G$. Soit $\{g_s\}_{s\in[0,1]}$ un chemin continu de l'identité à g dans $\mathbf{SO}(3)$ (un tel chemin existe : si $g = r_{\vec{u}}(\theta)$ il suffit de prendre
$$[g_s] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(s\theta) & -\sin(s\theta) \\ 0 & \sin(s\theta) & \cos(s\theta) \end{pmatrix}$$
dans une base orthonormée $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ de $\mathbb{R}^3$ euclidien). Posons $h_s = g_s h g_s^{-1}$. Alors $\{h_s\}_{s\in[0,1]}$ est un chemin continu de h à ghg^{-1}, contenu dans H par hypothèse (H est distingué). Donc $ghg^{-1} \in H_0$: H_0 est distingué. Si $H_0 = \mathbf{SO}(3)$ on a gagné, sinon $H_0 = \{1\}$. Si $H \neq H_0$, alors H n'est pas contenu dans le centre de G ; il existe donc h et $h' \neq h$ dans H, conjugués. D'après ce qui prècede il existe un chemin continu de h à h' ; donc de 1 à $h^{-1}h'$, contenu dans H. Ceci contredit $H_0 = \{1\}$. Nous avons ainsi montré que $\mathbf{SO}(3)$ est simple.
4. Soit H un sous-groupe distingué de $\mathbf{O}(3)$. Soit H_0 la composante connexe par arcs du neutre. Nous savons que H_0 est un sous-groupe de $\mathbf{SO}(3)$, distingué dans $\mathbf{SO}(3)$. D'après ce qui précède $H_0 = \{1\}$ ou $H_0 = \mathbf{SO}(3)$. Dans le premier cas, $H = \mathbf{SO}(3)$ ou $\mathbf{O}(3)$. Dans le second, $H = \{1\}$ ou $\{\pm 1\}$. Conclusion : $\mathbf{O}(3)$ a 4 sous-groupes distingués qui sont $\{1\}$, $\mathbf{O}(3)$, $\{\pm 1\}$ (son centre) et $\mathbf{SO}(3)$ (sa composante neutre).

Correction de l'exercice 112.

1. On aimerait écrire directement que
$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \exp\left[\int_0^t \begin{pmatrix} a(s) & b(s) & c(s) \\ c(s) & a(s) & b(s) \\ b(s) & c(s) & a(s) \end{pmatrix} \mathrm{d}s\right] \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}.$$

Toutefois ceci est illicite car le système n'est pas à coefficients constants. Nous allons voir que c'est quand même vrai. Remarquons déjà que, si l'on pose (avec $j = e^{2i\pi/3}$), les matrices se codiagonalisent

$$\left|\begin{array}{lcc} u & = & x+y+z \\ v & = & x+jy+j^2z \\ w & = & x+j^2y+jz \end{array}\right. \Longrightarrow \left|\begin{array}{lcc} u' & = & (a+b+c)\,u \\ v' & = & \left(a+j^2b+jc\right)v \\ w' & = & \left(a+jb+j^2c\right)w \end{array}\right.$$

D'où (avec u_0, v_0et w_0 les conditions initiales)

$$\left|\begin{array}{lcc} u(t) & = & u_0 \exp \int_0^t (a(s)+b(s)+c(s))\,\mathrm{d}s \\ v(t) & = & v_0 \exp \int_0^t \left(a(s)+j^2b(s)+jc(s)\right)\mathrm{d}s \\ w(t) & = & w_0 \exp \int_0^t \left(a(s)+jb(s)+j^2c(s)\right)\mathrm{d}s \end{array}\right.$$

Finalement, on récupère x, y et z par

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{3}\left[u_0 \exp \int_0^t \mu(s)\,\mathrm{d}s + v_0 \exp \int_0^t \nu(s)\,\mathrm{d}s + w_0 \exp \int_0^t \omega(s)\,\mathrm{d}s\right] \\ y(t) &= \frac{1}{3}\left[u_0 \exp \int_0^t \mu(s)\,\mathrm{d}s + v_0 j^2 \exp \int_0^t \nu(s)\,\mathrm{d}s + w_0 j \exp \int_0^t \omega(s)\,\mathrm{d}s\right] \\ z(t) &= \frac{1}{3}\left[u_0 \exp \int_0^t \mu(s)\,\mathrm{d}s + v_0 j \exp \int_0^t \nu(s)\,\mathrm{d}s + w_0 j^2 \exp \int_0^t \omega(s)\,\mathrm{d}s\right], \end{aligned}$$

avec $\mu = a+b+c$, $\nu = a+j^2b+jc$ et $\omega = a+jb+j^2c$. On peut aussi donner une écriture plus compacte en remarquant que le système s'écrit sous la forme $X'(t) = J_{a,b,c}(t)\,X(t)$ avec $J_{a,b,c}(t) = aI + bJ + cJ^2$, où J est la matrice

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \exp\left(\int_0^t J_{a,b,c}(s)\,\mathrm{d}s\right)\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}.$$

2. Montrons que

$$\text{(U.1)} \qquad \tilde{R}(t) = I_p + \sum_{n=1}^{+\infty} \underset{0\le t_1\le\ldots\le t_n\le t}{\int\!\cdots\!\int} A(t_n)\,A(t_{n-1})\ldots A(t_1)\,\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\ldots\mathrm{d}t_n$$

est bien définie : on sait (par réordonnement) que

$$\mathcal{V}_n = \mathrm{Vol}\,\{(t_1,\ldots t_n) \mid 0 \le t_1 \le \ldots \le t_n \le t\} = \frac{t^n}{n!}.$$

On pose pour tout $n \geqslant 1$, ϕ_n le terme général de la série de fonctions définissant $\tilde{R}$ dansU.1, on a d'une part, si $\|\cdot\|$ est une norme d'algèbre :

$$\|\phi_n(t)\| \le \underset{.0\le t_1\le\ldots\le t_n\le t}{\int\!\cdots\!\int} \|A(t_n)\,A(t_{n-1})\ldots A(t_1)\|\,\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\ldots\mathrm{d}t_n \le \frac{t^n}{n!}\left(\sup_{[0,t]}\|A(t)\|\right)^n.$$

Montrons à présent que les ϕ_n sont de classe $\mathscr{C}^1$: il s'agit de dériver

$$\begin{aligned}
\phi_n'(t) &= \frac{d}{dt}\left(\underset{0\leq t_1\leq\ldots\leq t_n\leq t}{\int\!\cdots\!\int} A(t_n)\,A(t_{n-1})\ldots A(t_1)\,\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\ldots\mathrm{d}t_n\right)\\
&= \frac{d}{dt}\left(\int_0^t A(t_n)\left[\int\!\cdots\!\int_{0\leq t_1\leq\cdots\leq t_{n-1}\leq t_n} A(t_{n-1})\ldots A(t_1)\,\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\ldots\mathrm{d}t_{n-1}\right]\mathrm{d}t_n\right)\\
&= \frac{d}{dt}\left(\int_0^t A(t_n)\,\phi_{n-1}(t_n)\,\mathrm{d}t_n\right)\\
&= A(t)\phi_{n-1}(t)\,.
\end{aligned}$$

Cette expression est encore valable si $n=1$ car on a alors par calcul direct $\phi_1'(t)=A(t)=A(t)\,\phi_0(t)$ avec $\phi_0=I_p$. Donc, par convergence normale sur tout $[0,T]$ de la série des ϕ_n et de leurs dérivées, on a que $\tilde{R}$ est de classe $\mathscr{C}^1$, et par l'expression des dérivées

$$\tilde{R}'(t)=A(t)\sum_{n=0}^{+\infty}\phi_n(t)=A(t)\tilde{R}(t).$$

Avec la condition initiale $\tilde{R}(0)=I_p$, ceci permet d'identifier $\tilde{R}$ à la résolvante R. Signalons que l'expression U.1 est moins mystérieuse si l'on se rappelle, même vaguement, d'une preuve du théorème de Cauchy-Lipschitz. En effet, ce n'est rien de plus qu'un théorème de point fixe (dans son cas général, point fixe de Picard) que l'on atteint par itérations d'une certaine application contractante, ce à quoi correspond le procédé de sommation des ϕ_n dont la série converge vers la résolvante.

3. Si $\mathcal{A}$ est commutative, on peut changer l'ordre dans les produits, de sorte que

$$\forall\sigma\in\mathcal{S}_n,\phi_n(t)=\underset{0\leq t_1\leq\ldots\leq t_n\leq t}{\int\!\cdots\!\int} A\left(t_{\sigma(n)}\right)A\left(t_{\sigma(n-1)}\right)\ldots A\left(t_{\sigma(1)}\right)\mathrm{d}t_{\sigma(1)}\mathrm{d}t_{\sigma(2)}\ldots\mathrm{d}t_{\sigma(n)}.$$

Sommant ces égalités sur toutes les permutations, on obtient

$$\phi_n(t)=\frac{1}{n!}\int\!\cdots\!\int_{[0,t]^n} A(\tau_1)\cdots A(\tau_n)\,\mathrm{d}\tau_1\cdots\mathrm{d}\tau_n,$$

puis, par le théorème de Fubini sur pavé compact

$$\phi_n(t)=\frac{1}{n!}\left(\int_0^t A(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)^n.$$

Finalement

$$R(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}\phi_n(t)\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\left(\int_0^t A(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)^n=\exp\left[\int_0^t A(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right].$$

On retrouve ainsi l'expression de la résolvante pour une équation scalaire d'ordre 1 ou un système différentiel à coefficients constants (ce qui n'est pas surprenant puisque le cadre de notre calcul englobe ces deux cas de figure). De bons exemples d'algèbres commutatives de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ sont les algèbres de polynômes en une matrice donnée. Par exemple, avec $\mathcal{A}=\mathbb{R}[J]$ où J est la matrice compagnon de la question précédente, on retrouve le cas de la question précédente. On remarque aussi que quand on veut résoudre

$$\left|\begin{array}{rcl} x' &=& ax-by\\ y' &=& bx+ay\end{array}\right.$$

en posant $z = x+iy$ et en se ramenant ainsi à $z' = (a + ib)\, z$ puis $z\,(t) = e^{t(a+ib)} z$ (les physiciens disent « passer en complexes »), on se situe encore dans un cas particulier de cette démarche dans la sous-algèbre $\mathbb{R}\,[K] = \mathcal{A} \simeq \mathbb{C}$ (qui est même un corps) de $\mathcal{M}_2\,(\mathbb{R})$, où K est la matrice compagnon (compagne ?) de $X^2 + 1$.

Références

[1] C. Deschamps, A.Warusfel, *Mathématiques* Tout-en-un MP–MP* (3ème edition), Dunod. 48, 61, 72

[2] S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas, *Exercices de mathématiques – oraux X-ENS*, Algèbre 1 (2ème edition), Cassini, Paris, 2007. 11, 16

[3] —, Algèbre 2 (1ère edition), Cassini, Paris, 2006. 39

[4] —, Analyse 2 (2ème edition), Cassini, Paris, 2009. 63, 73

[5] *International Mathematics Competition for University Students*, 2012. 20

[6] Communiqué par G.Lewertowski. 18

[7] R. Mansuy, R. Mneimné, *Algèbre linéaire – Réduction des endomorphismes*, Vuibert, 2012. 31

[8] Communiqué par T. Nham. 51

[9] Communiqué par N. de Rancourt. 13

[10] *Revue de la filière mathématique* (RMS), 1990–2012.

[11] J-P. Sanchez, cours de TS, Lycée Louis-le-Grand, 2009. 10