EXERCICES DE COLLES EN MP* 2014-2015

GABRIEL PALLIER

La plupart des exercices sont suivis d'indications de précision variable et correspondant à peu près à celles qui peuvent être données à l'oral. Certains exercices sont corrigés à la fin. Voir aussi les exercices de l'année 2013–2014 (Attention au changement de programme).

Table des matières

Date: 2014-2015.

A. Fonctions d'une variable réelle, convexité.

Exercice 1 (Une inégalité)**.** Soient $n \geqslant 2$, $x_1, \dots x_n$ des réels strictement positifs.

1. Montrer que
$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \cdots + \frac{x_n}{x_1} \geq n.$$
Cas d'égalité ?
2. En déduire que :
$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{x_i}{x_j} \geq n^2.$$

Indications. 1. On pourra utiliser l'inégalité arithmético géométrique en remarquant que $\frac{x_1}{x_2} \cdots \frac{x_n}{x_1} = 1$.

2. On pourra décomposer la somme :
$$\begin{aligned} \sum_{i,j}^{n} \frac{x_i}{x_j} &= \frac{x_1}{x_1} + \cdots + \frac{x_n}{x_n} \\ &\quad + \frac{x_1}{x_2} + \cdots + \frac{x_n}{x_1} \\ &\quad + \cdots + \frac{x_1}{x_n} + \cdots + \frac{x_n}{x_{n-1}} \end{aligned}$$
et utiliser la question précédente. Une autre méthode est d'observer que pour tous i, j
$$\frac{x_i}{x_j} + \frac{x_j}{x_i} \geq 2,$$
puis utiliser le cas $n = 2$ de la question 1.

Exercice 2 (Point d'inflexion)**.** Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue, deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ et telle que
$$f(0) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$
Montrer que f'' admet un zéro sur $\mathbb{R}_+^\star$.

Indications. Dans le cas contraire, quitte à changer le signe de f, f serait strictement convexe ; montrer que ceci amène une contradiction.

Exercice 3 (Une inégalité)**.** Soient $a_1, \dots, a_n$ des réels positifs tels que $a_1 \cdots a_n = 1$. Montrer que
$$\prod_{i=1}^{n} (2 + a_i) \geq 3^n,$$
et donner le cas d'égalité.

Indications. Observer que le cas d'égalité est atteint si les a_i sont tous égaux à 1. Ceci invite à utiliser l'inégalité arithmético-géométrique appliquée à 1, 1 et a_i ce qui donne
$$\frac{2 + a_i}{3} \geq a_i^{1/3}$$

Remarque. Appliquer l'inégalité arithmético-géométrique à 2 et a_i est insuffisant puisque cela donne seulement $2 + a_i \geq 2\sqrt{2} a_i^{1/2}$; or $2\sqrt{2} < 3$.

Exercice 4 (Fonction convexe et dérivable)**.** 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe et dérivable. Montrer que f est $\mathscr{C}^1$.

2. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est convexe et deux fois dérivable, a-t-on que f est $\mathscr{C}^2$?

Indication.

1. On pourra remarquer que f' (qui est croissante) admet des limites à droite et à gauche en tout point, puis que f' vérifie la propriété des valeurs intermédiaires (théorème de Darboux) de sorte que f' est continue.
2. Construire une fonction $\tilde{f}$ croissante dérivable mais pas de classe $\mathscr{C}^1$, considérer une primitive de $\tilde{f}$.

Remarque. Le théorème de Darboux indique que la propriété des valeurs intermédiaires ne caractérise pas l'ensemble des fonctions continues : les fonctions dérivées la vérifient aussi.

Exercice 5 (Un lemme de comparaison série-intégrale pour les fonctions convexes)**.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe dérivable, $n \geqslant 1$ un entier naturel. Montrer que

$$0 \leq \frac{1}{2} f(0) + f(1) + \cdots + f(n-1) + \frac{1}{2} f(n) - \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t \leq \frac{f'(n) - f'(0)}{8}.$$

Indications. On pourra se ramener à l'encadrement

$$0 \leqslant \frac{f(k) + f(k+1)}{2} - \int_0^k f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{f'(k+1) - f'(k)}{8},$$

que l'on traitera à l'aide de l'inégalité de convexité.

Exercice 6 (α-convexité)**.** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est α-convexe s'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall (x,y) \in I^2,\ \forall t \in [0,1],\ f((1-t)x + ty) \leq (1-t) f(x) + t f(y) - \frac{\alpha}{2} t (1-t)(x-y)^2.$$

1. Montrer que f est α-convexe si, et seulement si pour tous x et y dans I,
$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq f(x) + f(y) - \frac{\alpha}{8}(x-y)^2.$$
2. On suppose que f est deux fois dérivable sur I (privé de ses bornes) et continue. Donner une condition nécessaire et suffisante sur f'' pour que f soit α-convexe.

Exercice 7 (* Une inégalité dans le triangle)**.** Soit ABC un triangle pas plat du plan. On note α, β, γ les mesures de ses angles dans $]0, \pi[$. Montrer que

$$\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin\beta} \geq \frac{8}{3 + 2\cos\gamma}.$$

Cas d'égalité ?

B. Séries numériques et dénombrabilité

Exercice 8. Soit α un nombre réel. Montrer qu'il existe une suite $(\epsilon_k)_{k\in\mathbb{N}^\star} \in \{-1,1\}^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\alpha = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\epsilon_k}{k}.$$

Indications. La série harmonique diverge.

Exercice 9. Discuter, selon la valeur des paramètres $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$, de la nature de la série

$$\sum_{n\geqslant 3} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta (\ln\ln n)^\gamma}.$$

Indications. On pourra effectuer une comparaison série-intégrale, puis un changement de variables bien choisi pour se ramener au cas des intégrales de Bertrand.

Remarque. Il existe des techniques internes à la théorie des séries numériques qui s'apparentent au changement de variables dans une intégrale : décalage d'indice, sommation par paquets... toutefois leur usage est en général moins souple notamment parce qu'en général on va plutôt regrouper que scinder les termes [1] (ce qui en termes de changement de variables correspond à remplacer x par y avec dy « plus grand » que dx, et c'est l'opposé de ce qu'on veut faire ici).

Exercice 10 (L'ensemble triadique de Cantor)**.** On pose $A_0 = [0,1]$, et, pour tout entier n, $A_{n+1} = \frac{A_n}{3} + \frac{2+A_n}{3}$. Puis, l'ensemble K est défini par

$$K = \bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n.$$

1. Montrer que

$$A_n = \left\{ \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x_k}{3^k},\ x_k \in \{0,1,2\},\ x_k \neq 1 \text{ si } k \leqslant n \right\}.$$

   On ne cherchera pas à montrer l'unicité d'une telle écriture.

2. En déduire que K est l'ensemble des sommes $x = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k/3^k$, avec $x_k \in \{0,2\}$ pour tout k.
3. Montrer qu'une telle écriture est unique. En déduire que K est indénombrable.
4. Soit Π l'ensemble des intervalles maximaux contenus dans $[0,1] \setminus K$. Π est-il dénombrable ?

Indication.

1. Procéder par récurrence sur $n \geqslant 0$.
2. Ceci provient de la définition de K.

---

1. Il peut certes arriver que l'on scinde les termes en deux termes de signes opposés par exemple quand on identifie une somme en cascade ou que l'on effectue une transformation d'Abel (la première technique étant un cas particulier de la seconde) ; mais cela relève du contexte de l'identification d'une primitive, qui est différent.

3. On pourra démontrer que l'application

$$\begin{array}{rcl} \{0,2\}^{\mathbb{N}} & \to & K \\ (x_k) & \mapsto & \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} x_k/3^k \end{array}$$

est strictement croissante.

4. Oui !

Exercice 11 (*)**.** Montrer que l'ensemble $\mathcal{S}_{\mathbb{N}}$ des bijections de $\mathbb{N}$ est indénombrable.

Indications. Considérer par exemple le sous-groupe de $\mathcal{S}_{\mathbb{N}}$ formé des produits (d'une infinité de) « transpositions » $\tau_i = (2i, 2i+1)$.

Remarque. Le sous-groupe de $\mathcal{S}_{\mathbb{N}}$ des bijections f à support fini (i.e., telles que $f(n) = n$ pour n assez grand) est lui dénombrable, mais pas de type fini, c'est-à-dire qu'il faut une infinité de ses éléments pour l'engendrer.

Exercice 12 (ENS)**.** Existe-t-il une indexation par $\mathbb{N}^\star$ des rationnels de $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ telle que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{r_k}{k} < +\infty ?$$

Indications. Oui. Penser à une suite d'entiers à croissance très rapide...

C. Analyse 1 - Intégrales généralisées, intégrales à paramètre

Exercice 13 (Convergence dominée)**.** Donner une limite ou un équivalent des suites suivantes quand $n \to +\infty$

$$A_n = \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx, \tag{1}$$

$$B_n = \int_0^1 \frac{ne^{-x}}{nx+1} dx. \tag{2}$$

Indications. Pour la première suite d'intégrales, on rappelle que pour tout x réel

$$e^x = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Exercice 14. On pose, pour tout $t > 0$

$$F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx} - e^{-x}}{x} dx.$$

1. Montrer que F est bien définie et $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, calculer F', puis exprimer F.
2. En déduire, pour tous $a, b > 0$, la valeur de l'intégrale

$$I(a,b) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx.$$

Indications. Ne pas découper l'intégrale en deux morceaux.

Exercice 15 (Sur les fonctions de carré sommable)**.** Soit f de carré intégrable sur $\mathbb{R}_+$, i.e. $\int_{\mathbb{R}_+} f^2 < +\infty$ (et f continue par morceaux...).

1. Montrer que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt = 0.$$

2. Montrer que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \left(\int_0^x f(t)dt\right)^2 = 0.$$

Exercice 16 (Intégrale de Gauss)**.** On se donne f et g définies pour $x \geq 0$ par

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt \quad ; \quad g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt.$$

1. Montrer que f et g sont bien définies et dérivables. Exprimer g' en fonction de f et de f'.
2. Montrer que $g + f^2$ est constante, puis que g tend vers 0 au voisinage de $+\infty$. En déduire

$$\mathscr{G} = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Exercice 17 (Intégrale de Dirichlet)**.** On pose, pour tout n entier naturel

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin t} dt.$$

1. Montrer que I_n est bien définie, et la calculer. *On pourra chercher une relation de récurrence.*

2. En déduire
$$\mathscr{D} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 18 (Fonction Γ)**.** La fonction Γ d'Euler est définie pour tout $x > 0$ par
$$\Gamma(x) := \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

1. Montrer que Γ est bien définie, strictement positive, de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^\star$. Montrer que $\ln \Gamma$ est convexe.
2. Montrer que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pour tout $x > 0$, que $\Gamma(1) = 1$ et que $\Gamma(1/2) = 2\mathscr{G}$ (où $\mathscr{G}$ est l'intégrale de Gauss, cf. exercice 4). En déduire les expressions de $\Gamma(m/2)$, pour tout $m \in \mathbb{N}^\star$, en fonction de $\mathscr{G}$.
3. On admet l'équivalent de Stirling[2] $n! \sim \sqrt{2\pi n}\,(n/e)^n$. Retrouver la valeur de $\mathscr{G}$. *On pourra appliquer les inégalités de convexité pour* $\ln \Gamma$ *entre des grands demi-entiers.*

2. Obtenu par exemple à l'aide des intégrales de Wallis : exercice à connaître.

D. Analyse 2 - Suites et séries de fonctions

Exercice 19 (Suites de fonctions glissées)**.** Soient f et g deux fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de limites nulle en $\pm\infty$. On pose

$$f_n(x) = f(x+n) \quad ; \quad g_n(x) = g(x-n) \quad ; \quad h_n(x) = f_n(x)\, g_n(x).$$

1. Montrer que (f_n) et (g_n) convergent simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que (f_n) (resp. (g_n)) converge uniformément sur toute partie de $\mathbb{R}$ minorée (resp. majorée). La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?
3. Montrer que la suite (h_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction que l'on précisera.

Exercice 20 (Série de primitives itérées)**.** Soient k un entier naturel, et $f_0 \in \mathscr{C}^k(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ une fonction. On pose, pour tout entier n et pour tout x réel :

$$f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que la série de terme général f_n définit une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^k$.

Exercice 21. Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$, (f_n) une suite de fonctions dérivables sur $[a, b]$ à valeurs réelles, de dérivées uniformément bornées sur $[a, b]$ par une même constante M. On suppose que (f_n) converge simplement vers une fonction f sur $[a, b]$.

1. Montrer que f est continue et que la convergence $f_n \to f$ est uniforme sur $[a, b]$
2. La fonction f est-elle dérivable ?

Exercice 22 (Une série de fonctions)**.** Montrer que la fonction

$$f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \sin \frac{1}{nx^2}$$

est bien définie et $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$. Montrer que f tend vers 0 en $+\infty$; donner un équivalent. *On pourra utiliser, si besoin, l'identité*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k / (k+1) = \ln 2$$

qui sera une conséquence immédiate du cours sur les séries entières.

Exercice 23 (* Un calcul de limite)**.** Calculer la limite suivante :

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^n.$$

Indications. On pourra pratiquer le théorème d'interversion des limites au voisinage de $+\infty$ sur la série de fonctions

$$u_n : x \mapsto \begin{cases} e^{t\ln(1-k/t)} & \text{si } k < t \\ 0 & \text{si } 0 \le t \le k. \end{cases}$$

Exercice 24 (* Le pôle de ζ en 1)**.** Pour x réel, on pose lorsque cela converge

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-x} \quad \text{et} \quad \zeta_2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} n^{-x}.$$

1. Montrer que ζ (resp. ζ_2) est bien définie et $\mathscr{C}^1$ sur $]1, +\infty[$ (resp. sur $]0, +\infty[$)

2. Montrer que pour tout $x > 1$

$$\zeta(x) = \frac{\zeta_2(x)}{1 - 2^{1-x}} \tag{3}$$

A l'aider de cette identité, on prolonge ζ à tout $\mathbb{R}_+^\star \setminus \{1\}$.

3. Montrer que la fonction ζ admet au voisinage de 1 à droite [3] le développement asymptotique

$$\zeta(x) = \frac{1}{x-1} + \gamma + o(1), \tag{ζ}$$

où γ est la constante d'Euler-Mascheroni$\gamma = \lim_n H_n - \ln n$. En déduire la valeur de

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n}$$

en fonction de γ.

3. On pourrait aussi montrer que c'est encore tout aussi valable à gauche, pour le prolongement donné à la question précédente. Ce n'est pas nécessaire pour la suite.

E. Analyse 3 - Révisions

Exercice 25. Soit f une fonction continue intégrable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On pose, pour tout $x > 0$,

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t-x) - f(t)|\, dx.$$

1. Montrer que
$$\lim_{x\to 0} g(x) = 0.$$
En déduire que g est continue.
2. Montrer que g admet une limite en $+\infty$ que l'on précisera.

Exercice 26. Soit X un ensemble, (a_n) une famille d'applications de X dans $\mathbb{C}$, (b_n) une famille décroissante[4] d'applications de X dans $\mathbb{R}_+$.

1. Montrer que si le série de terme général a_n converge uniformément, et si b_0 est bornée sur X, alors la série $\sum a_n b_n$ converge uniformément sur X.
2. Montrer que si les sommes partielles de la série $\sum a_n$ sont bornées par une constante M uniformément sur n, et si la suite b_n converge uniformément vers 0, alors la série $\sum a_n b_n$
3. Soit α_n une suite sommable de réels positifs. Montrer la convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+^\star$ des séries de fonctions
$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{1+x^n}\alpha_n \quad ; \quad \sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{1+x^{2n}}\alpha_n.$$

Exercice 27 (Un calcul d'intégrale par une série)**.** Montrer que

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{x-1}dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Exercice 28. [Inégalité de Knopp] Soit (a_n) une suite de réels strictement positifs tels que la série $\sum \frac{1}{a_n}$ est convergente.

1. Montrer que la série de terme général $\frac{n}{a_1+\cdots+a_n}$ est convergente, et qu'il existe une constante $K > 0$ indépendante de a telle que
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{a_1+\cdots+a_n} \leq K \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}.$$
2. Quelle est la constante K optimale ? A-t-on des cas d'égalité ?
3. Que dire sur la série de terme général $\frac{n}{a_1+\cdots+a_n}$ si $\sum \frac{1}{a_n}$ diverge ?

Exercice 29 (Irrationnalité de π)**.** 1. Soit P un polynôme de degré $2n$; on pose

$$F = P - P'' + P^{(4)} - \cdots + (-1)^{2n} P^{(2n)}$$

Montrer la formule de Hermite :

$$\int_0^\pi P(x)\sin x dx = F(0) + F(\pi). \tag{4}$$

On pourra chercher une primitive de $x \mapsto P(x)\sin x$ faisant intervenir F.

4. Ceci veut dire :
$$\forall x \in X, \forall n \in \mathbb{N}, b_{n+1}(x) \leq b_n(x)$$
Attention, cela ne veut pas dire que les (b_n) sont des fonctions décroissantes (ce qui n'a d'ailleurs a priori pas de sens car nous n'avons pas muni X d'un ordre).

2. Dans la suite, on suppose que π est rationnel et s'écrit sous la forme a/b. On pose, pour tout n entier naturel
$$P_n(x) = \frac{1}{n!}x^n(a-bx)^n \quad \text{et} \quad I_n = \int_0^\pi P_n(x)(\sin x)\,dx.$$
Montrer qu'on a l'encadrement suivant pour tout n (on pourra majorer P_n)
$$0 < I_n \leq \frac{\pi}{n!}\left(\frac{a^2}{4b}\right)^n.$$
3. A l'aide de la formule de Hermite, montrer que pour tout n, I_n est un entier naturel non nul. Conclure.

F. Groupes, anneaux, corps, polynômes

Exercice 30. Soient m et n deux entiers naturels non nuls. Calculer dans $\mathbb{Q}[X]$ le pgcd de $X^n - 1$ et $X^m - 1$.

Indications. Deux méthodes

1. Scinder dans $\mathbb{C}$. Pour trouver $\mathbb{U}_n \cap \mathbb{U}_m$ on pourra utiliser le théorème de Lagrange
2. Ecrire

$$\begin{aligned} X^n - 1 &= (X-1)\left(1 + \cdots + X^{n-1}\right) \\ X^m - 1 &= (X-1)\left(1 + \cdots + X^{m-1}\right) \end{aligned}$$

et appliquer l'alogorithme d'Euclide aux deux quotients.

Exercice 31. Soient G et G' deux groupes abéliens.

1. Montrer que l'ensemble H des morphismes de G dans G' forme un groupe abélien (pour l'addition des morphismes).
2. Si G et G' sont cycliques d'ordre n et m, montrer que H est cyclique ; préciser son ordre.
3. On suppose que G et G' sont finis d'ordre premiers entre eux. Que dire de H ?

Indications. 1. Les fonctions de G dans G' forment déjà un groupe ; il s'agit de montrer que les morphismes de G dans G' en est un sous-groupe.

2. Observer que si $\psi : G \to G'$ est un morphisme et si x est un générateur de G, alors il est entièrement caractérisé par $\psi(x)$. Raisonner ensuite sur l'ordre de $\psi(x)$.
3. On pourra utiliser le théorème de Lagrange pour montrer que H est trivial.

Exercice 32 (Un critère de cyclicité pour les groupes finis)**.** On se propose de montrer que si un groupe fini G n'a pas « trop » d'éléments d'ordre d pour tout d divisant son ordre, alors il est cyclique. [5]

1. Soient n et d tels que $d \mid n$ dans $\mathbb{Z}$, avec $n \geqslant 1$. Montrer que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ possède un unique sous-groupe de cardinal d. En déduire

$$n = \sum_{d \mid n} \varphi(d) \tag{5}$$

où φ est la fonction indicatrice d'Euler

2. Soit G un groupe de cardinal n. On suppose que pour tout d divisant n, l'équation $x^d = 1$ admet au plus d solutions. On note $\psi(d)$ le nombre d'éléments de G qui ont pour ordre exactement d. Montrer que :

$$\psi(d) \in \{0, \varphi(d)\}$$

En déduire que G est cyclique

3. Soit k un corps. Montrer que tout sous-groupe fini de $k^\times$ est cyclique [6].

Indications. 1. On pourra partitionner $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ selon les ordres de ses éléments.

2. On pourra réécrire l'équation (5) pour le groupe G et montrer que $\psi(n) \neq 0$.
3. Observer que le polynôme $X^d - 1$ possède au plus d racines dans k.

5. D'après Serre, chapitre 1 du *Cours d'arithmétique*

6. Ce résultat entre en défaut pour les corps non commutatifs (On peut penser au groupe quaternionique).

Exercice 33 (Lemme de Cauchy)**.** Soit G un groupe fini d'ordre n, et p un diviseur premier de n.

1. On considère l'ensemble $E = \left\{(g_0, \dots g_{p-1}) \in G^{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} \mid g_0 \cdots g_{p-1} = e\right\}$. Calculer le cardinal de E.
2. On écrit $(g_0, \dots g_{p-1}) \sim \left(g'_0, \dots g'_{p-1}\right)$ s'il existe $k \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ tel que $g'_\ell = g_{\ell+k}$ pour tout $\ell \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur E. Quels sont les cardinaux des classes ?
3. Montrer que G possède un élément d'ordre[7] p. C'est le lemme de Cauchy.
4. Soit k le nombre de sous-groupes de G qui sont d'ordre p. Montrer que $k \equiv 1$ modulo p.
5. Application : Montrer que tous les groupes abéliens d'ordre n sont cycliques si et seulement si n est sans facteur carré. Quels sont les groupes abéliens d'ordre 30 ?[8]

Indications. 1. Dans un p-uplet appartenant à E, le choix des $p-1$ premiers éléments est complètement libre et impose le choix du dernier.

2. Utiliser que p est premier pour montrer que les classes sont de cardinal 1 ou p.
3. On pourra écrire le cardinal de E à l'aide de la disjonction des classes de la relation $\sim$
4. Observer que $(p-1)\,k$ est le nombre d'éléments d'ordre p.
5. Le sens direct provient de la réciproque du lemme chinois. Réciproquement, si le cardinal$|G|$ est sans facteur carré, on pourra écrire
$$|G| = p_1 \cdots p_r,$$
considérer g_i un élément de p_i grâce au lemme de Cauchy, et montrer que $g_1 \cdots g_r$ engendre G.

Exercice 34 (Polynômes et fonctions polynômiales)**.** Soit k un corps. On considère φ qui à un polynôme associe sa fonction polynômiale

$$\begin{array}{rcl} \varphi : k\,[X] & \to & \mathcal{F}\,(k,k) \\ P & \mapsto & \left(x \mapsto \tilde{P}\,(x)\right) \end{array}$$

1. Montrer que φ est un morphisme de k-algèbres.
2. On suppose que k est infini. Montrer que φ est injectif, mais pas surjectif.
3. On suppose que k est fini de cardinal q. Montrer que φ est surjectif, mais pas injectif ; plus précisément, montrer que $\ker\varphi$ est égal à l'idéal
$$I = (X^q - X)\,k\,[X]\,.$$
On pourra utiliser librement que le groupe $k^\times$ est cyclique, ce qui découle de l'exercice 3.

Indications. 1. C'est une question classique.

7. Plus généralement, les théorèmes de Sylow impliquent que G possède un sous-groupe d'ordre p^α, pour tout $\alpha \leqslant \nu_p\,(n)$.
8. Grâce à un théorème de Burnside, on peut extraire cet énoncé du contexte abélien, avec une condition légèrement plus exigeante : tous les groupes d'ordre n sont cycliques si, et seulement si, $\mathrm{pgcd}\,(n, \varphi\,(n)) = 1$.

2. Pour l'injectivité, remarquer que cela revient à montrer qu'il existe des matrices de Vandermonde inversibles arbitrairement grandes. Pour l'absence de surjectivité, observer que les fonctions non nulles admettant une infinité de zéros ne peuvent pas être polynômiales. On peut aussi simplement raisonner par cardinalité : si k est infini dénombrable alors $k[X]$ aussi, mais $\mathcal{F}(k,k)$ contient le sous-ensemble des fonctions caractéristiques équipotent $\mathcal{P}(k)$ qui n'est pas dénombrable d'après le théorème de Cantor ; tandis que si k est indénombrable alors $\mathcal{F}(k,k)$ n'admet pas de base dénombrable, contrairement à $k[X]$.
3. φ est surjectif : les polynômes interpolateurs de Lagrange
$$\Lambda_x(X) = \prod_{y \neq x} \frac{X-y}{x-y}.$$
pour $x \in k$, forment une base de l'image de φ qui est la base canonique de $\mathcal{F}(k,k)$. Comme $k[X]$ est de dimension infinie, φ ne peut être injectif. Maintenant, soit P tel que $\varphi(P) = 0$. $k^\times$ étant cyclique,
$$\varphi(P(X^q)) = 0.$$

Exercice 35 (* Anneaux où $x^3 = x$)**.** Soit A un anneau. On suppose que :
$$\forall x \in A,\ x^3 = x.$$

1. Montrer que : $\forall x \in A,\ 6x = 0$.
2. On suppose qu'il existe $p \in \{2,3\}$ tel que : $\forall x \in A,\ px = 0$. Montrer que A est commutatif *Dans le cas $p = 2$, on pourra commencer par montrer que A est un anneau de* BOOLE*, autrement dit $x^2 = x$ pour tout x.*
3. On revient au cas général. Montrer que $D = 2A$ et $T = 3A$ sont des idéaux bilatères. En déduire que A est commutatif.
4. Soit A' un anneau dans lequel $x^4 = x$ pour tout x. A' est-il commutatif ?

G. Algèbre linéaire

Exercice 36. (Supplémentaire commun) Soit K un corps infini, E un K-espace vectoriel de dimension finie n, p un entier naturel et $F_1, \ldots F_p$ des sous-espaces de E. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les F_i pour qu'ils admettent tous un même supplémentaire S dans E. Même question avec un corps fini de cardinal q (on rajoutera une condition sur p).

Exercice 37. (Somme de projecteurs) Soit E un k-espace vectoriel de dimension finie n, où $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$. Soient n endomorphismes non nuls $\pi_1, \ldots \pi_n$ de $\mathcal{L}(E)$ tels que $\pi_i \pi_j = \delta_{ij} \pi_i$ pour tous $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

1. Montrer que les π_i sont tous de rang 1.
2. Montrer que les sous-espaces Im π_i sont en somme directe.

Exercice 38. (Trace et permutations) Soit E un k-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$. A quelle condition sur $\sigma \in \mathcal{S}_3$ a-t-on, pour tous $u_1, u_2, u_3 \in \mathcal{L}(E)$

$$\mathrm{Tr}\,(u_1 u_2 u_3) = \mathrm{Tr}\left(u_{\sigma(1)} u_{\sigma(2)} u_{\sigma(3)}\right)$$

? Même question avec quatre endomorphismes.

Exercice 39. (Grassman, Euler-Poincaré) Soit k un corps, et $(E_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ une suite d'espaces vectoriels de dimensions finies sur k. On appelle suite exacte une suite d'applications linéaires

$$\{0\} \overset{u_1}{\to} E_1 \overset{u_2}{\to} E_2 \ldots E_r \overset{u_r}{\to} \{0\}$$

telle que $\mathrm{Im} u_i = \ker u_{i+1}$ pour tout $i \in \{1, \ldots, r-1\}$

1. On suppose qu'il existe une suite exacte $\{0\} \to E_1 \ldots \to E_r \to \{0\}$. Montrer la relation d'Euler Poincaré
$$\sum_{i=1}^{r} (-1)^i \dim E_i = 0$$
2. Soit U un k-ev et soient $E, F \subset U$ sous-espaces vectoriels de dimension finie sur k. Exhiber une suite exacte courte $\{0\} \to E \cap F \to E \times F \to E + F \to \{0\}$. Retrouver la formule de Grassman
$$\dim(E+F) + \dim(E \cap F) = \dim E + \dim F$$

Exercice 40 (Automorphismes de $\mathcal{L}(E)$)**.** Soit E un k-espace vectoriel de dimension finie. Montrer que tous les automorphismes de la k-algèbre $\mathcal{L}(E)$ sont de la forme $\Phi_w : u \mapsto w u w^{-1}$ avec $w \in \mathbf{GL}(E)$.

H. Réduction des endomorphismes 1

Exercice 41. Soit V un hyperplan de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ formé exclusivement de matrices diagonalisables[9]. Montrer que V contient I_2.

Exercice 42. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que

$$u(P(X)) = X^n P(1/X)$$

Montrer que u est diagonalisable ; quelles sont ses valeurs propres ?

Exercice 43 (Mines-Ponts)**.** Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(a_1, \dots a_n) \in \mathbb{R}^n$ pour que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} (0) & & a_n \\ & \iddots & \\ a_1 & & (0) \end{pmatrix}$$

soit diagonalisable sur $\mathbb{C}$ (resp. sur $\mathbb{R}$).

Exercice 44 (CCP)**.** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $a_{ij} = 1 - \delta_{ij}$

1. Trouver un polynôme annulateur de A. En déduire que la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$, et déterminer son spectre.
2. A est-elle inversible ? Si oui, calculer son inverse.

Exercice 45 (Les classes de similitude de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$)**.** Discuter, selon la valeur de b et c paramètre réels, le nombre de classes de similitude réelle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ayant pour polynôme caractéristique $X^2 + bX + c$. *On pourra distinguer selon la valeur du discriminant Δ, et dans le cas $\Delta < 0$ montrer que si deux matrices réelles sont semblables sur $\mathbb{C}$ alors elles sont semblables sur $\mathbb{R}$.*

Exercice 46 (Invariance du polynôme minimal par extension de corps)**.** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\mu_{\mathbb{R}}$ le minimal de A vue dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et $\mu_{\mathbb{C}}$ le minimal de A vue dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. L'objectif est de montrer que $\mu_{\mathbb{R}} = \mu_{\mathbb{C}}$.

1. Montrer que $\mu_{\mathbb{C}}$ divise $\mu_{\mathbb{R}}$.
2. Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{R}^n$ (appelé vecteur primitif). tel que pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, $P(A)x = 0 \implies P(A) = 0$ *On pourra utiliser qu'une union finie de sev stricts de $\mathbb{R}^n$ est non totale.*
3. En déduire que $\mu_{\mathbb{R}} \mid \mu_{\mathbb{C}}$, conclure.

Exercice 47 (* Un théorème de Burnside)**.** Soit G un sous-groupe de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}^\star$ tel que $\forall g \in G,\ g^k = I_n$. L'objectif est de montrer que G est fini.

1. Montrer que $\mathrm{tr}\ G = \{\mathrm{tr}\ g,\ g \in G\}$ est fini.
2. Soient $g_1, \dots, g_r$ qui engendrent le sous-espace $\mathrm{Vect}(G)$. On pose

$$\begin{array}{rcl} \varphi : G & \to & (\mathrm{tr}\ G)^r \\ g & \mapsto & \left(\mathrm{tr}\ g^{-1}g_1, \dots, \mathrm{tr}\ g^{-1}g_r\right) \end{array}$$

   Montrer que φ est injective. Conclure[10].

9. On peut montrer qu'il existe de tels hyperplans. Vous allez en rencontrer un dans quelques semaines...
10. Burnside avait conjecturé en 1902 que tous les groupes de type fini dont tous les éléments sont d'ordre fini sont finis. Golod et Shafarevitch ont réfuté cette conjecture en 1964.

I. Réduction des endomorphismes 2

Exercice 48. Soit n un entier naturel. On suppose qu'il existe $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ telles que $A^2 = B^2 = I$ et $AB + BA = 0$. Montrer que n est pair.

Exercice 49. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}^\star$ tel que $A^k = I_2$. Montrer que $A^{12} = I_2$.

Exercice 50. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$; montrer que $\chi_{A\overline{A}} \in \mathbb{R}[X]$

Exercice 51. Diagonaliser la matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec $a_{ij} = \delta_{1,|i-j|}$

Exercice 52. Soit E un $\mathbb{C}$-ev de dim finie, u et v dans $\mathcal{L}(E)$. Montrer que

$$\chi_u(v) \in \mathbf{GL}(E) \iff (\text{sp } u) \cap (\text{sp } v) = \emptyset \iff \chi_v(u) \in \mathbf{GL}(E).$$

Exercice 53. Soit E un $\mathbb{C}$-ev de dim finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ de spectre $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\} \subset \mathbb{C}$. Déterminer

$$\{P \in \mathbb{C}[X],\ P(u) \text{ nilpotent}\}.$$

Exercice 54. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que u est diagonalisable si et seulement s'il existe $(\lambda_1, \ldots \lambda_r) \in \mathbb{K}^r$ et $(p_1, \ldots p_r) \in (\mathcal{L}(E) \setminus \{0\})^r$. non nuls tels que

$$\forall k \in \mathbb{N},\ u^k = \lambda_1^k p_1 + \cdots + \lambda_r^k p_r.$$

Montrer que les (λ_i, p_i) sont alors uniques (à l'ordre près).

Exercice 55 (Matrice compagne, applications)**.** Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$, unitaire. On écrit $P = \sum a_k X^k$, et l'on pose

$$\mathscr{C}(P) = \begin{pmatrix} & & & -a_0 \\ 1 & & & \vdots \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $\chi_{\mathscr{C}(P)} = P$
2. On pose $P_k = \chi_{\mathscr{C}(P)^k}$. Exprimer les racines complexes de P_k en fonction de celles de P. En déduire que si $\alpha \in \mathbb{C}$ est algébrique sur $\mathbb{Q}$, alors α^k aussi pour tout $k \geqslant 1$. *On pourra trigonaliser $\mathscr{C}(P)$ sur $\mathbb{C}$.*
3. On suppose que P est à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et a toutes ses racines dans le disque unité. Montrer que ses racines sont dans $\{0\} \cup \mathbb{U}_m$ pour un certain m (théorème dû à Kronecker).

Exercice 56 (*)**.** Soit E un $\mathbb{C}$-ev. Pour tous $u, v \in \mathcal{L}(E)$ on pose $\phi_{u,v} \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$ tel que

$$\phi_{u,v}(w) = uw + wv.$$

1. Montrer que $\phi_{u,0}$ (resp. $\phi_{0,v}$) est nilpotent si et seulement si u (resp. v) est nilpotent, puis que $\phi_{u,0}$ (resp. $\phi_{0,v}$) est diagonalisable si et seulement si u (resp. v) est diagonalisable.
2. Montrer que si u et v sont nilpotents, resp. diagonalisables alors $\phi_{u,v}$ est nilpotent, resp. diagonalisable. *On pourra codiagonaliser.*
3. *La décomposition de Dunford est un prérequis pour cette question.* Montrer que si $\phi_{u,v}$ est diagonalisable, alors u et v sont diagonalisables.

J. Topologie des e.v.n. 1

Dans tous les exercices $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercice 57. Soit $E = \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ et $c \in [0,1]$. Montrer que $\varphi_c : \ f \mapsto f(c)$ n'est pas continu pour la norme $\|f\|_1 = \int_0^1 |f|$. Donner une norme sur E qui rende φ_c continu.

Exercice 58. Soit C un convexe de E. Montrer que $\overline{C}$ et $\overset{\circ}{C}$ sont convexes.

Exercice 59. Soit E un espace vectoriel normé. Montrer qu'une intersection finie d'ouverts denses dans E est encore dense dans E. Application : Dans $E = \mathbb{R}^n$, montrer qu'une union finie de sous-espaces vectoriels stricts n'est pas totale.

Exercice 60. Soit $E = \mathbb{R}[X]$ muni de la norme $\|P\| = \sup_{t\in[-1,1]} |P(t)|$. Montrer que le sous-espace

$$F = \{P \in E,\ P(2) = 0\}$$

est dense dans E. La forme linéaire $\Lambda : P \mapsto P(2)$ est-elle continue ?

Exercice 61. Soit $E = \left\{f \in \mathscr{C}^1([0,1], \mathbb{R}), f(0) = 0\right\}$ muni de

$$N_1(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$$

$$N_2(f) = \|f + f'\|_\infty$$

1. Montrer que N_1 et N_2 sont des normes sur E
2. Montrer que N_1 est strictement plus fine que N_2.

Exercice 62 (* Ecole polytechnique)**.** Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer qu'il existe une norme N sur $\mathbb{R}[X]$ telle que

$$X^n \underset{n\to+\infty}{\overset{N}{\longrightarrow}} P.$$

Indications. On pourra observer que la famille $(X^n - P)_{n>\deg P}$ est échelonnée et compléter en une base de $\mathbb{R}[X]$.

K. Topologie des e.v.n. 2

Exercice 63.

1. Soit K un compact convexe de $E = \mathbb{R}^n$ et $f : K \to K$. On suppose qu'il existe une norme sur E telle que f est 1-lipschitzienne. Montrer que f admet un point fixe
2. Donner des contre-exemples si K n'est pas compact ou convexe. Est-ce qu'il suffit que K soit étoilé ?

Indications.

1. On pourra fixer $x \in K$ et introduire la suite d'applications $f_n : y \mapsto \frac{1}{n}x + \left(1 - \frac{1}{n}\right) f(y)$ dont on montrera qu'elles admettent des points fixes
2. Le cercle $S(0,1)$ (pas convexe), l'intervalle $]0,1]$ (pas compact)

Exercice 64. On se place dans $\mathbb{R}^n$ muni d'une norme strictement convexe (cela signifie que l'inégalité triangulaire est stricte dès qu'on l'applique à deux vecteurs non positivement liés). Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ connexe par arcs et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ continue et non constante. On suppose que f atteint son maximum M sur Ω. Montrer qu'il existe $r > 0$, une boule fermée $B = B'(x_0, r) \subset \Omega$ et $y_0 \in S(x_0, r)$ tels que $f(y_0) = M$ et

$$\forall y' \in B \backslash \{y_0\}, f(y) < M.$$

On pourra commencer par supposer $\Omega = \mathbb{R}^n$ pour simplifier. Il est très fortement conseillé de faire un dessin.

Donner des contre-exemples si Ω n'est pas connexe par arcs, ou bien si la norme n'est pas strictement convexe.

Exercice 65 (Connexité par arcs de certaines classes de similitude)**.** 1. Montrer qu'une classe de similitude de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs *On pourra commencer par montrer que $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ est connexe par arcs.*

2. Montrer que si n est impair, les classes de similitude de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont connexes par arcs

Exercice 66 (Théorème de prolongement de Tietze & Urysohn)**.** On se propose de démontrer le résultat suivant : Soit E un espace vectoriel normé, soit F un fermé non vide de E et soit $f : F \to [-1, 1]$ continue. Alors f se prolonge en $\overline{f} : E \to [0, 1]$ continue.

a) Cas particulier : On suppose de plus E de dimension finie et F convexe

1. On pose, pour tout $x \in E$, $d_F(x) = \inf_{y \in F} \|x - y\|$. Montrer que d_F est bien définie et 1-lipschitzienne, puis qu'il existe $y \in F$ tel que $d_F(x) = y$.
2. Montrer que y est unique si la norme $\|\cdot\|$ est strictement convexe ; on le suppose désormais (pourquoi est-ce licite ?) et on le note $p_F(x)$.
3. Montrer que p_F est continue ; conclure.
4. Montrer que si F est borné on peut prendre $\overline{f}$ uniformément continue.

b) * Cas général :

1. Soient A et B deux fermés disjoints de E. Montrer qu'il existe $g \in \mathscr{C}(E, [0, 1])$ telle que $g_{|A} = 0$ et $g_{|B} = 0$.*On pourra utiliser les fonctions d_A et d_B après avoir justifié qu'elles sont encore bien définies et continues.*
2. Montrer qu'il existe $\hat{f} : E \to [-1/3,\ 1/3]$ continue et telle que $\sup_F \left| f - \hat{f} \right| \leq 2/3$.
3. En itérant la question précédente, conclure. *On pourra construire $\overline{f}$ comme une limite.*

4. *Difficile, question à réfléchir mais preuve non exigible*. Est-ce que le théorème est encore vrai si l'on remplace $[-1,1]$ par le cercle $\mathbb{U}$?

L. Topologie des e.v.n. 3 - fonctions vectorielles

Exercice 67. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i): Ω est connexe par arcs

(ii): Ω est connexe par arcs affines par morceaux, ie

$$\begin{aligned}&\forall (x,y) \in \Omega^2, \exists p \in \mathbb{N}^\star, \exists (x_0, \dots x_p) \in \Omega^{\{0,\dots,p\}}\\ &x_0 = x,\ x_p = y,\ \forall i \in \{1, \dots, p-1\} \, [x_i, x_{i+1}] \subset \Omega\end{aligned}$$

(iii): Ω est connexe par arcs $\mathscr{C}^\infty$, ie

$$\forall (x,y) \in \Omega^2, \exists f \in \mathscr{C}^\infty ([0,1], \mathbb{R}^n),\ f(0) = x,\ f(1) = y,\ f([0,1]) \subset \Omega.$$

Y a-t-il encore équivalence si Ω n'est plus supposé ouvert ?

Eléments de correction. Les implications $(ii) \implies (i)$ et $(iii) \implies (i)$ sont immédiates. Pour $(i) \implies (ii)$: Disons que x et y dans Ω sont affine-connectés s'il existe un arc affine par morceaux contenu dans Ω reliant x à y. Il n'est pas difficile de voir que l'affine-connexité est une relation d'équivalence. Notons les classes d'équivalences $(\Omega_i)_{i \in I}$; elles forment une partition de Ω et il faut essentiellement voir que $|I| = 1$ autrement dit qu'il n'y en a qu'une seule. Soit donc $x \in \Omega_i$ et ϵ tel que $B(x, \epsilon) \subset \Omega$. Alors il est clair que $B(x, \epsilon) \subset \Omega_i$. Donc Ω_i est ouvert dans Ω. Puisque $\Omega_i = \Omega \setminus \cup_{j \neq i} \Omega_j$, et que les Ω_j sont ouverts dans Ω (donc leur union aussi), Ω_i est fermé dans Ω. La fonction 1_{Ω_i} est donc continue, à valeurs dans ± 1 ; elle ne peut pas être surjective car $\{\pm 1\}$ n'est pas connexe par arcs. Comme $\Omega_i \neq \emptyset$, $\Omega_i = \Omega$ ce qui est ce qu'on voulait.

Pour $(i) \implies (iii)$: soient x et y dans Ω, et $\gamma : [0,1] \to \Omega$ continue telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$. Ω^c est fermé, la distance d_{Ω^c} à Ω^c est une fonction continue sur $\mathbb{R}^n$ (exercice) ; elle est minorée par $\delta > 0$ qu'elle atteint sur le compact $\gamma([0,1])$. D'après le théorème de Weierstrass, il existe f à composantes polynômiales telle que $\|f - \gamma\|_{\mathscr{C}([0,1], \mathbb{R}^2)} < \delta/2$. Posons $\delta_x = x - f(0)$ et $\delta_y = y - f(1)$, puis $g(t) = f(t) + (1-t)\,\delta_x + t\delta_y$. Alors g est à composantes polynômiales, donc $\mathscr{C}^\infty$ et $g(0) = x$, $g(1) = y$. De plus, par l'inégalité triangulaire pour tout $t \in [0,1]$ nous avons

$$d_{\Omega^c}(g(t)) > \delta - \delta/2 - \delta/2 = 0$$

d'où $g(t) \in \Omega$.

Remarque. On pouvait aussi montrer $(i) \implies (ii)$ à l'aide d'une interpolation affine par morceaux de γ. (On a convergence uniforme vers γ en interpolant sur la subdivision régulière par uniforme continuité de γ, et l'interpolation est à valeur dans Ω grâce à l'argument de distance à un fermé développé dans $(i) \implies (iii)$. Pour $(i) \implies (iii)$ on peut aussi introduire une notion de $\mathscr{C}^\infty$- connexité sur Ω mais la transitivité est plus délicate à montrer. C'est un peu plus simple en se restreignant à des fonctions polynômiales.

Le résultat ne tient plus si l'on ne suppose pas Ω ouvert. Ainsi un cercle euclidien de $\mathbb{R}^2$ de rayon > 0 est connexe par arcs, connexe par arcs $\mathscr{C}^\infty$ mais pas connexe par arcs affines.

Il est plus difficile de trouver un ensemble connexe par arcs non connexe par arcs $\mathscr{C}^\infty$ (puisqu'une fonction $\mathscr{C}^\infty$ peut s'arrêter quelque part, ce qui l'autorise à avoir quelques points singuliers... mais pas trop). On peut montrer (mais avec des techniques assez hors programme, à ma connaissance) que les points singuliers vont occuper peu de place, donc par exemple le graphe de la fonction de Weierstrass conviendrait.

Exercice 68. Soit $X \subset \mathbb{R}^n$ convexe et dense. Montrer que $X = \mathbb{R}^n$.

Exercice 69. Soit $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$. On suppose qu'il existe $\lambda > 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad f^{(n)}(0) = 0 \tag{6}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \sup_{\mathbb{R}} \left\| f^{(n)} \right\| \leq \lambda^n n! \tag{7}$$

Montrer que $f = 0$

Indications. On pourra montrer que $X = f^{-1}(0)$ est non vide, fermé dans $\mathbb{R}$ et voisinage de tous ses points. La formule de Taylor avec reste intégral est la bienvenue pour ce dernier résultat !

Remarque. En fait, la condition (7) est une condition d'analycité, i.e. f est localement développable en série entière avec rayon de convergence $1/\lambda$.

Exercice 70. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe de classe $\mathscr{C}^2$. On suppose que $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$ et que $\lim_{x\to-\infty} f'(x) = -\infty$. Montrer que l'intégrale

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{if(t)}\mathrm{d}t.$$

est semi-convergente.

Indications. On pourra reparamétrer l'arc décrit par une primitive de e^{if}

Remarque. La fonction F parcourt en fait un arc Γ dans le plan complexe $\mathbb{C}$ qui « tourne de plus en plus vite ». Intuituitivement le comportement est celui d'une spirale qui tend à ressembler à un cercle d'autant plus petit que f' est grand. La condition $f' \to +\infty$ impose que le rayon de ce cercle tend vers 0, autrement dit que l'intégrale converge. En fait on a reparamétré pour avoir une variation régulière de l'angle, ce qui se traduit sur le fait que la vitesse diminue. Un cas particulier important est celui de l'intégrale de Fresnel, dont la valeur est

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it^2}\mathrm{d}t = \frac{1+i}{2\sqrt{2}}\pi.$$

La trajectoire correspond aussi à celle d'une particule chargée dans un champ magnétique de direction constante mais d'intensité variable.

Exercice 71 (Graphe d'une fonction Hölder)**.** On se place dans $\mathbb{R}^2$ muni d'une norme $\|-\|$. Soit A une partie bornée

1. Montrer que pour tout $\epsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ et $x_1, \ldots, x_N \in A$ tels que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{N} B(x_i, \epsilon)$$

   Dans la suite, on note $N(A, \epsilon)$ le plus petit N vérifiant cette propriété.

2. Montrer que si A est d'intérieur non vide, il existe $k > 0$ tel que $N(A, \epsilon) \geqslant k\epsilon^{-2}$ [On pourra commencer par supposer $\|-\| = \|-\|_\infty$ et raisonner sur l'aire d'une union de boules de rayons ϵ]

3. Soit β tel que $0 < \beta \leq 1$ et $f : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ une fonction β-hölderienne, ce qui signifie

$$\exists c > 0, \forall (x, y) \in [0,1]^2, \; \|f(x) - f(y)\| \leq c\,|x - y|^\beta .$$

   On pose $\Gamma = f([0,1])$. Montrer qu'il existe k' tel que

$$N(\Gamma, \epsilon) \leq k'\epsilon^{-1/\beta}.$$

   En déduire que si $\beta > \frac{1}{2}$, Γ est d'intérieur vide.

Exercice 72 (*)**.** On se place dans E un evn réel de dimension finie.

1. Soit C un convexe compact symétrique (i.e., la fonction indicatrice est paire). par rapport à 0 et d'intérieur non vide. Montrer que C est la boule unité d'une norme N_C sur E.
2. Soit C un convexe compact. Montrer que C est homéomorphe à la boule unité fermée de $\mathbb{R}^p$ pour un certain $p \leqslant \dim E$.

Exercice 73. 1. On pose $\mathrm{Nil} = \{N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ N \text{ est nilpotente}\}$ et

$$\mathrm{Uni} = \{U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ U - I \text{ est nilpotente}\}.$$

Montrer que exp réalise un homéomorphisme de Nil sur Uni *On pourra remarquer qu'elle admet sur Nil une expression polynômiale.*

2. Application : soit $A \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$. On suppose que $A = B^2$ où $B \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $A = \exp(P(B))$. *On pourra considérer la décomposition de Dunford de B.*

M. Séries entières

Exercice 74. Etablir la convergence et calculer la somme de la série
$$\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{3n+1}.$$

Exercice 75. Soit P un polynôme de degré r à coefficients complexes. On note
$$f(z)=\sum_{n\geqslant 0}P(n)\,z^n.$$

1. Quel est le rayon de convergence ?
2. Montrer que f est de la forme
$$f(z)=\frac{Q(z)}{(1-z)^{r+1}}$$
où Q est un polynôme.

Exercice 76 (Nombres de Catalan)**.** Soit c_n le nombre d'expression bien parenthésées comprenant $2n$ parenthèses (Par exemple : (()) est une expression bien parenthésée à 4 parenthèses, tandis que ())(est une expression mal parenthésée à 4 parenthèses, d'ailleurs elle fait mal à lire...).

1. Montrer que $c_n\leqslant 4^n$. Que peut-on en déduire sur le rayon de convergence de la série $C=\sum c_nx^n$?
2. Montrer que la suite c_n est définie par la relation de récurrence
$$c_0 = 1 \tag{8}$$
$$c_{n+1} = \sum_{k=0}^{n}c_kc_{n-k}. \tag{9}$$
Trouver une équation vérifiée par la série C. En déduire que
$$c_n=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$
3. Comment interpréter « combinatoirement » l'inégalité $c_n\leqslant\binom{2n}{n}$?

Exercice 77 (* Les nombres Zig-Zag)**.** Soit $\sigma\in\mathcal{S}_n$ une permutation ; σ est dite zigzagante si
$$\sigma(1)<\sigma(2)>\sigma(3)<\cdots<\sigma(2k)>\sigma(2k+1)<\cdots$$

On définit la suite z_n comme suit : $z_0=z_1=1$ et pour tout $n\geqslant 2$, z_n est le nombre de permutation zigzagantes de $\mathcal{S}_n$.

1. Etablir la relation de récurrence
$$z_{n+1}=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}z_kz_{n-k}.$$
2. On pose $Z(x)=\sum\frac{z_n}{n!}x^n$. Montrer que le rayon de convergence est ≥ 1, puis que
$$2Z'=1+Z^2.$$
En déduire que $Z(x)=\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$.

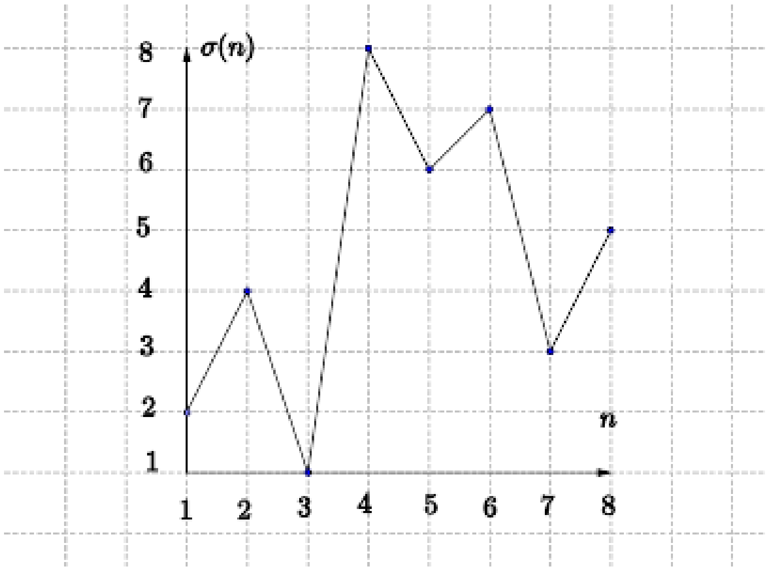

FIGURE M.1. Graphe d'une permutation zigzagante de $\mathcal{S}_8$

3. En extrayant les parties paire et impaire, montrer pour $|x| < \pi/2$

$$\frac{1}{\cos x} = \sum_{n \geqslant 0} \frac{z_{2n}}{(2n)!} x^{2n} \qquad \tan x = \sum_{n \geqslant 0} \frac{z_{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

Quel est le rayon de convergence de ces séries ?

N. Révisions d'analyse

Exercice 78. Etablir la limite et un équivalent quand t tend vers $+\infty$ de

$$\Phi(t) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x+x^2)^t}.$$

Exercice 79 (Mines-Ponts)**.** On pose

$$a_n = \int_0^{+\infty} e^{-t}\left(\sin^{2n} t\right)\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que a_n est bien définie et que

$$a_n = \frac{1}{1-e^{-\pi}}\int_0^{\pi} e^{-t}\left(\sin^{2n} t\right)\mathrm{d}t.$$

2. En déduire un équivalent de a_n quand $n \to +\infty$ de la forme $cn^{-\gamma}$.

Exercice 80. Montrer que la fonction

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(2^n x)}{2^n}$$

est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$, mais pas dérivable en 0.

Exercice 81 (* Ecole polytechnique)**.** Montrer :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} &= \frac{\pi}{4}\\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2k+1}\right) &= \frac{\pi^2}{16}.\end{aligned}$$

Exercice 82 (* Ecole normale supérieure – Inégalité de Carleman)**.** Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de réels positifs telle que la série de terme général a_n converge

1. A-t-on

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k < +\infty\,?$$

2. On pose $b_n = (a_1 \cdots a_n)^{1/n}$ pour $n \geqslant 1$. Montrer que

$$b_n \leq \frac{1}{n}(n!)^{-1/n}\sum_{k=1}^{n} k a_k.$$

3. Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'inégalité

$$\left(\frac{n+1}{e}\right)^n \leq n!.$$

4. En déduire que (b_n) est sommable et que si (a_n) est non nulle

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n < e\sum_{n=1}^{+\infty} a_n.$$

Puis montrer que e est optimale pour cette inégalité.

Exercice 83 (* Ecole polytechnique – Inégalité de Wirtinger)**.** Soit E l'espace vectoriel des fonctions $\mathscr{C}^1$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ qui s'annulent en 0 et en 1.

1. Soit $f \in E$. Montrer que les intégrales suivantes sont bien définies :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 f(t)\, f'(t) \cot(\pi t)\, \mathrm{d}t \\ I_2 &= \int_0^1 \frac{f(t)^2}{\tan^2 \pi t}\left(1+\tan^2 \pi t\right) \mathrm{d}t \end{aligned}$$

2. Montrer que $I_1 = \frac{\pi}{2} I_2$
3. En déduire l'inégalité de Wirtinger :

$$\int_0^1 f'^2 \geqslant \pi^2 \int_0^1 f^2.$$

4. Cas d'égalité ?

Indications. 1. f est $\mathscr{C}^1$ et s'annule en 0 (resp. en 1) donne $f(t) = \mathcal{O}(t)$ (resp. $f(1-t) = \mathcal{O}(t)$)

2. On pourra intégrer par parties
3. On pourra majorer I_1^2 par l'inégalité de Cauchy-Schwarz et minorer I_2^2 par l'inégalité $(a+b)^2 \geq 4ab$

O. Espaces euclidiens

Exercice 84. Soit E un espace euclidien de dimension n. On cherche à caractériser l'ensemble

$$\mathscr{S} = \left\{ s \in \mathcal{L}(E) \mid \exists u \in \mathcal{O}(E),\ s = \frac{u+u^{-1}}{2} \right\}.$$

1. Soit $s \in \mathscr{S}$. Montrer que s est symétrique, puis que χ_s est scindé sur $\mathbb{R}$ à racines dans $[-1,1]$.
2. Montrer que u laisse stable les espaces $E_\lambda(s) = \ker(s - \lambda \mathrm{Id}_E)$. pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.
3. Soit $\lambda \in \left]-1,1\right[$; montrer que l'induit de u sur $E_\lambda(s)$ n'a pas de vecteur propre. En déduire que $\dim E_\lambda$ est pair, puis que la valuation de λ dans χ_s est paire.
4. Soit $s \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que s est symétrique, a son spectre inclus dans $[-1,1]$ et que pour tout $\lambda \in \left]-1,1\right[$, $m_\lambda(\chi_s)$ est paire. Montrer que $s \in \mathscr{S}$.

Indications. 1. s est symétrique : revenir à la définition et montrer $\langle s(x) \mid y\rangle = \langle x \mid s(y)\rangle$ pour tous $x, y \in E$. On peut aussi considérer la matrice S dans une base orthonormée puis montrer qu'elle est symétrique. Appliquer ensuite le théorème spectral; pour le spectre, on pourra utiliser l'inégalité triangulaire pour montrer que $\|s(x)\| \leq \|x\|$.
2. Observer que s et u commutent.
3. Les valeurs propres réelles d'un orthogonal sont ± 1. En dimension impaire, tout endomorphisme d'un espace vectoriel réel possède un espace propre. Enfin, s est diagonalisable donc la multiplicité de λ dans le caractéristique est égale à la dimension de l'espace propre.
4. On pourra utiliser la réduction des orthogonaux.

Remarque. On a montré en fait que la projection orthogonale de $\mathcal{O}(E)$ sur $\mathcal{S}(E)$ est l'ensemble des endomorphismes symétrique de spectre inclus dans $[-1,1]$ et dont la multiplicité des valeurs prores $\neq \pm 1$ est paire. De plus, $s \in \mathscr{S}$ étant donné on peut montrer en affinant le procédé de la question 4 qu'il y a au plus deux $u \in \mathcal{O}(E)$ tels que $s = \frac{1}{2}\left(u + u^{-1}\right)$.

Exercice 85 (Décomposition en espaces $\{p, q\}$-stables)**.** Soit E un espace euclidien de dimension finie n. Soient p et q deux projecteurs orthogonaux. On dit qu'un sous-espace $V \subset E$ est $\{p, q\}$-stable s'il est stable par p et par q.

Montrer que E est somme directe orthogonale d'espaces $\{p, q\}$-stables de dimension $\leqslant 2$

Indications. On pourra procéder par récurrence sur n et observer que si V est $\{p, q\}$-stable alors $V^\perp$ aussi. Pour établir l'existence d'un sous-espace $\{p, q\}$-stable de dimension $\leqslant 2$, on pourra considérer $\mathrm{Vect}(x, p(x))$ où x est un vecteur propre de $p - q$ (après avoir justifié l'existence de x).

Exercice 86. Soit E un espace euclidien de dimension n, a et b dans E non colinéaires. On pose pour tout $x \in E$

$$u(x) = \langle a \mid x\rangle b - \langle b \mid x\rangle a.$$

1. Montrer que u est antisymétrique, i.e.

$$\forall x, y \in E,\ \langle f(x) \mid y\rangle = -\langle x \mid f(y)\rangle.$$

Que dire de son spectre réel ? Déterminer le(s) espace(s) propre(s).

2. Montrer l'inégalité, pour tout $x \in E$:
$$\|u(x)\| \leq \|a\| \|b\| \|x\| .$$
On pourra montrer dans un premier temps qu'on peut supposer $x \in Vect(a, b)$.

Exercice 87. Soit E un espace euclidien de dimension 3. On se donne $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et $\mathcal{B}' = (e_4, e_5, e_6)$ deux bases orthonormées. Montrer qu'il existe $u \in \mathcal{S}(E)$ tel que
$$\forall i \in \{1, \ldots, 6\}, \ \langle u(e_i) \mid e_i \rangle = 0.$$

P. Calcul différentiel 1

Exercice 88. On s'intéresse aux applications f polynômiales de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ qui admettent un seul point stationnaire qui est un minimum local strict, mais pas un minimum global.

1. Peut-on trouver f sous la forme suivante
$$f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2,$$
où $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$?
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par
$$(x,y) \mapsto x^2(1+y)^3 + y^2.$$
Montrer qu'elle répond à la question.

Exercice 89 (Une équation aux dérivées partielles linéaire)**.** Trouver toutes les fonctions f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbb{R}_- \times \{0\}\}$ et vérifiant
$$y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y} = 2f.$$
Y a-t-il des solutions non nulles sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$?

Eléments de correction. Pour (r,θ) dans $V = \mathbb{R}_+^\star \times]-\pi,\pi[$, posons
$$\begin{aligned} x(r,\theta) &= r\cos\theta \\ y(r,\theta) &= r\sin\theta \end{aligned}$$
et $g = f \circ \Phi$, où $\Phi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$. Alors
$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\frac{\partial x}{\partial \theta}(r,\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\frac{\partial y}{\partial \theta}(r,\theta) \\ &= -r\sin\theta\partial_x f(x,y) + r\cos\theta\partial_y f(x,y) \\ &= -2f(x,y) \\ &= -2g(r,\theta) \end{aligned}$$
Posons $g_r(\theta) = g(r,\theta)$; alors g est $\mathscr{C}^1$ et
$$g_r'(\theta) = \mathrm{d}g(r,\theta)(e_\theta(r,\theta)) = \frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) = -2g_r(\theta)$$
Par conséquent, on est ramené à une équation différentielle linéaire d'ordre 1 :
$$g_r(\theta) = e^{-2\theta} g_r(0)$$
Donc, si l'on pose $h(r^2) = g_r(0)$, g s'écrit sous la forme
$$g(r,\theta) = h(r^2)e^{-2\theta}$$
Réciproquement, pour tout h de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}_+^\star$ dans $\mathbb{R}$, vérifions que
$$f(x,y) = h(x^2+y^2)e^{-2\arctan(y/x)}$$
est solution dans le domaine $U_0 = \mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R}$:
$$\begin{aligned} \partial_x f &= \left[2xh'(x^2+y^2) - \frac{2}{x^2}\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)^{-1} h(x^2+y^2)\right]e^{-2\arctan(y/x)} \\ \partial_y f &= \left[2yh'(x^2+y^2) - 2y\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)^{-1} h(x^2+y^2)\right]e^{-2\arctan(y/x)} \end{aligned}$$

On vérifie bien $y\partial_x f - x\partial_y f = 2f$ dans le domaine U_0. On vérifierait encore que

$$f(x,y) = h\left(x^2+y^2\right)e^{-4\arctan\left(y/\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\right)}$$

est solution sur U. Mais ces solutions ne s'étendent pas à $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ car elles admettent des limites différentes (si $h \neq 0$) au voisinage de $\mathbb{R}_- \times \{0\}$.

Exercice 90. Soit f l'application $X \mapsto {}^tXX$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que f est différentiable et que $\operatorname{rg}\,\mathrm{d}f(X) \leqslant \frac{n(n+1)}{2}$; puis que cette borne est atteinte si X est inversible

Eléments de correction.

1. L'image de f est incluse dans l'espace $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ qui est de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$.
2. Calculons :

$${}^t(X+H)(X+H) = {}^tXX + {}^tHX + {}^tXH + {}^tHH.$$

Or ${}^tHH = o(H)$, donc

$$\mathrm{d}f(X)(H) = {}^tHX + {}^tXH,$$

et il s'agit de montrer que pour toutes $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $X \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{R})$ l'équation d'inconnue matricielle Y

$$ {}^tXY + {}^tYX = A \tag{10}$$

admet une unique solution. Quitte à poser $Y' = {}^tXY$ on est amené à résoudre

$$Y' + {}^tY' = A.$$

Vu que A est symétrique il suffit de prendre $Y' = A/2$, soit $Y = {}^tX^{-1}A/2$

Remarque. Il est possible de montrer plus généralement que si r est le rang de X alors

$$\operatorname{rg}\,\mathrm{d}f(X) = \frac{r(2n-r+1)}{2}$$

En effet : $\ker \mathrm{d}f(X)$ est l'ensemble des matrice carrées Y telles que $Y' = {}^tXY$ est antisymétrique. On sait qu'il existe P et Q deux matrices inversibles telles que

$$PXQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = J_r$$

et la condition Y' antysymétrique se traduit par $J_r^t P^{-1}YQ$ antysymétrique. D'où

$$\dim\ker \mathrm{d}f(X) = n(n-r) + \frac{r(r-1)}{2}$$

On conclut d'après le théorème du rang.

Exercice 91. (Mines-Ponts) Déterminer $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que

$$f(x,y) = (g(x,y), 2xy)$$

ait pour différentielle en tout point une similitude directe.

Indications. Une similitude directe [11] est une application linéaire composée d'une homothétie et d'une rotation.

11. Cette indication doit être inutile pour les élèves ayant passé le baccalauréat avant 2012 inclus

Eléments de correction. On écrit la jacobienne de f :

$$(\text{Jac } f)(x,y) = \left[\begin{array}{cc} \partial_x g & \partial_y g \\ 2y & 2x \end{array}\right].$$

Pour que celle-ci soit la matrice d'une similitude directe (c'est la matrice dans une base orthonormée) il faut et suffit que

$$\begin{aligned} \partial_x g &= 2x \\ \partial_y g &= -2y \end{aligned}$$

C'est à dire

$$\mathrm{d}g(x,y) = 2x\mathrm{d}x - 2y\mathrm{d}y.$$

On trouve

$$g(x,y) = x^2 - y^2 + c.$$

avec $c \in \mathbb{R}$ une constante, comme condition nécessaire et suffisante.

Remarque. On peut alors interpréter f comme une fonction de la variable complexe $z = x + iy$:

$$f(z) = z^2 + c.$$

Exercice 92 (L'ouvert des matrices cycliques)**.** On définit f de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^n$ par

$$f(M) = \big(\text{tr } M,\ \text{tr } M^2, \ldots,\ \text{tr } M^n\big)$$

1. Montrer que f est différentiable et calculer $\mathrm{d}f$
2. Montrer que $\text{rg } \mathrm{d}f(M) = \deg \mu_M$ (où μ_M est le polynôme minimal de M)
3. On dit que M est cyclique si $\deg \mu_M = n$. Montrer que l'ensemble des matrices cyclique est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Indications.

1. D'abord différentier $M \mapsto M^i$, puis appliquer la formule de dérivation d'une composée. Ici tr est linéaire, donc identifiable à sa différentielle. Se souvenir que $\text{tr } AB = \text{tr } BA$. On doit trouver
$$\mathrm{d}f(M) : H \mapsto \big(\text{tr } H,\ 2(\text{tr } MH),\ \ldots n\big(\text{tr } M^{n-1}H\big)\big)$$
2. On pourra munir $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique et traduire la condition d'indépendance linéaire des gradients $\nabla f_i(M)$ puis des différentielles $df_i(M)$.
3. Toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est minimum local de la fonction rg (penser à la caractérisation du rang par les mineurs). Utiliser la question précédente.

Q. Calcul différentiel 2

Exercice 93 (Une EDP d'ordre 1)**.** Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ et telles que

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 8x + 16y.$$

Indications. On pourra faire un changement de variables linéaire. Par exemple $u = x + y$ et $v = x - y$ (d'autres choix sont possibles).

Exercice 94 (Une EDP)**.** Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ et telles que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2y + e^x,$$

avec les conditions « aux limites » $f(x, 0) = x^2$ et $f(0, y) = 3y$.

Indications. Par exemple, primitiver par rapport à x pour obtenir $\frac{\partial f}{\partial y}$, puis par rapport à y. Attention, les « constantes » d'intégration dépendent de y et x ! Les conditions doivent permettre de les identifier. On trouve comme unique solution

$$f(x, y) = xy^2 + ye^x + x^2 + 2y.$$

Exercice 95 (Extremums liés)**.** Soit

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \mapsto & xy + z^2. \end{array}$$

Calculer la borne inférieure et supérieure de f sur la sphère

$$\Sigma = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2 + y^2 + z^2 = 9 \right\}.$$

Indications. Déjà Σ est compacte, donc nous recherchons des extremums. On pourra montrer que si (x_0, y_0, z_0) est un extremum alors le noyau de $\mathrm{d}f$ en $v_0 = (x_0, y_0, z_0)$ contient le plan affine tangent à Σ en (x_0, y_0, z_0). On pourra aussi traduire par une condition de colinéarité entre $\nabla f(v_0)$ et v_0, qui donne les 6 points critiques

$$\left\{ (0, 0, \pm 3), \left(\pm \frac{3\sqrt{2}}{2}, \pm \frac{3\sqrt{2}}{2}, 0 \right) \right\},$$

et évaluer f en ces points. **Autre méthode** : on pourra éliminer les variables successivement (d'abord réexprimer f sur Σ en fonction de x et y dans un disque seulement). Observer qu'on obtient un unique point critique à l'intérieur du disque, et que les valeurs prises sur le bord du disque sont plus petites ; une étude locale au voisinage du point critique n'est donc pas nécessaire.

Exercice 96 (Contraposée du lemme de Schwarz)**.** Soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ telle que

$$f(x, y) = \frac{xy\left(x^2 - y^2\right)}{x^2 + y^2}.$$

1. Montrer qu'on peut prolonger par continuité f en 0 (On notera encore le prolongement f)
2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Est-elle de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$?

Indications. 1. On pourra utiliser l'inégalité $|xy| \leq \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)$ pour borner f.

2. Le calcul donne pour $(x, y) \neq 0$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y\left(1 - \frac{2y^4}{(x^2 + y^2)^2}\right),$$
et une expression similaire pour $\partial f/\partial y$ (utiliser l'antisymétrie en les deux variables). Donc $\mathrm{d}f$ admet pour limite 0 au voisinage de 0 et par ailleurs on peut montrer que $f(x, y) = \mathcal{O}\left(\|^t (x, y)\|^2\right)$, ce qui donne que f est différentiable en 0 de différentielle nulle [12]
3. f est $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ par les théorèmes généraux. On pourra montrer que les dérivées secondes $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$ existent mais ne sont pas égales et utiliser le lemme de Schwarz.

Exercice 97 (Un calcul d'extremum)**.** Calculer
$$M = \sup_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} \sin x \sin y \sin(x + y)$$
Indications. A l'aide d'une étude de périodicité et de signe, on pourra remarquer que l'on peut se restreindre au triangle
$$\mathcal{T} = \left\{(x, y) \in \left]0, +\infty\right[^2,\ x + y < \pi\right\},$$
qui est d'adhérence compacte (en particulier, le sup est atteint). Puis utiliser les techniques du calcul différentiel. On pourra s'épargner une étude locale au voisinage du point critique dans $\mathcal{T}$ en observant que la fonction y est positive, valant 0 sur les bords. On doit trouver que le maximum est atteint en $(\pi/3, \pi/3)$ et vaut $M = \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

Exercice 98 (Inégalité de la moyenne, application à la recherche de point fixe)**.** Soit E un espace euclidien, $f : \Omega \to E$ de classe $\mathscr{C}^1$ où Ω est un ouvert convexe de E.

1. On suppose qu'il existe une constante k telle que $\|df(x)(h)\| \leq k\|h\|$. pour tout $x \in \Omega$ et $h \in E$. Montrer que pour tous $x, y \in \Omega$ on a
$$\|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|.$$
2. Application : montrer que le système d'équations (S)
$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2}\sin(x_1 + x_2) \\ x_2 &= \frac{1}{2}\cos(x_1 - x_2) \end{aligned}$$
possède au plus une solution dans $\mathbb{R}^2$.
3. Montrer que le système possède exactement une solution.

Indications. 1. Utiliser l'inégalité de la moyenne sur l'expression
$$f(y) - f(x) = \int_0^1 \mathrm{d}f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,\mathrm{d}t.$$
Pour γ un arc $\mathscr{C}^1$ reliant x à y. Ici Ω est convexe, donc γ peut être pris particulièrement court, ce qui est l'idéal.

12. Il existe aussi un théorème de prolongement de la différentielle, comme pour le cas d'une variable réelle, du moment que la fonction est prolongeable par continuité et que la différentielle admet une limite. Ce n'est pas nécessaire ici car le fait que $\mathrm{d}f(0)$ existe et est égal à 0 est (presque) immédiat.

2. On pourra introduire l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que
$$f\left(\left(\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\begin{array}{c} \sin(x_1 + x_2) \\ \cos(x_1 - x_2) \end{array}\right),$$
calculer $df(x)(h)$, puis le borner en fonction de $\|h\|$ et utiliser l'inégalité précédente pour montrer que f est k-lipschitzienne. S'il existe deux points fixes, raisonner par l'absurde sur la distance entre les deux.
3. Soit $x \in \mathbb{R}^2$; montrer que la suite $x_k = \left(f^k(x)\right)$ admet une limite x_∞.

Exercice 99 (* Isométries globales vs isométries infinitésimale d'un espace euclidien. Préservation du laplacien)**.** E est l'espace $\mathbb{R}^n$ canoniquement euclidien. Soit $f : E \to E$ de classe $\mathscr{C}^2$. On dit que f est une **isométrie infinitésimale** si $\mathrm{d}f(x) \in \mathcal{O}(E)$ pour tout $x \in E$.

1. Soit f une isométrie infinitésimale, on pose
$$a_{i,j,k}(x) = \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(x) \frac{\partial f_m}{\partial x_j \partial x_k}(x) \tag{11}$$
Montrer que $a_{i,j,k} = a_{i,k,j}$ et $a_{i,j,k} = -a_{k,j,i}$. En déduire que $a_{i,j,k} = 0$
2. En déduire que si f est une isométrie infinitésimale et si f fixe 0, alors $f \in \mathcal{O}(E)$
3. Application : On rappelle que l'opérateur laplacien Δ est par définition
$$\Delta = \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i^2} \tag{12}$$
Caractériser les applications f telles que pour tout $u \in \mathscr{C}^\infty(E, \mathbb{R})$ on ait
$$\Delta(u \circ f) = (\Delta u) \circ f.$$

Indications. 1. L'égalité $a_{ijk} = a_{ikj}$ est le lemme de Schwarz. Pour montrer $a_{i,j,k} = -a_{k,j,i}$, on pourra différencier les relations d'orthogonalité entre les lignes de la jacobienne. Puis, pour obtenir $a_{i,j,k} = 0$ on pourra remarquer que le produit de deux transposition dans $\mathcal{S}_3$ est un 3-cycle, et que 3 est impair !

2. Remarquer que $\mathrm{d}f$ est partout inversible, de sorte que l'équation (11) implique
$$\frac{\partial^2 f_m}{\partial x_j \partial x_k} = 0.$$
Observer ensuite qu'une application de différentielle constante et qui fixe 0, est linéaire égale à sa différentielle.

3. Si $f \in \mathcal{O}(E)$, le laplacien est préservé (autrement dit l'égalité (12) est valable dans n'importe quelle base orthonormée, c'est d'ailleurs une définition assez élégante du laplacien). L'autre sens est moins immétiat ; poser $v(y) = u(x)$ avec $x = f(y)$; un calcul à l'aide de la règle de la chaîne donne
$$\Delta v(f(x)) = \sum_{j,k} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\partial f_j}{\partial y_i} \frac{\partial f_k}{\partial y_i} + \sum_j \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) \Delta f_j(y)$$
L'égalité pour tout u donne les deux équations
$$\frac{\partial f_j}{\partial y_i} \frac{\partial f_k}{\partial y_i} = \delta_{jk} \tag{13}$$
$$\Delta f_j(y) = 0 \tag{14}$$
Qui sont vérifiées si et seulement si $\mathrm{d}f(x) \in \mathcal{O}(E)$ partout, donc (cf question précédente) ssi $f - f(0) \in \mathcal{O}(E)$

Remarque. On peut montrer que si $\mathrm{d}f(x) \in \mathcal{O}(E)$ pour tout $x \in E$ avec f seulement $\mathscr{C}^1$, f est encore une isométrie globale. Ceci requiert cependant le lemme d'inversion locale qui est désormais hors programme.

R. Equations différentielles linéaires

Exercice 100. Résoudre sur $\mathbb{R}$ à l'aide d'un changement de variables

$$\left(1+x^2\right)y''+xy'+y=0. \tag{15}$$

Indications. Si $x=\theta(u)$ est le changement de variable (où $\theta : I \to \mathbb{R}$ est $\mathscr{C}^2$ bijective d'inverse $\mathscr{C}^2$) on a en posant $\tilde{y}=y\circ\theta$

$$y''(\theta(u))=\left(\theta^{-1}\right)'^2(\theta(u))\,\tilde{y}''(u).$$

Dans le but de rendre constant le coefficient devant $\tilde{y}''$, on est donc amené à choisir pour θ^{-1} une primitive de $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ et $I=\mathbb{R}$. On pourra vérifier qu'alors le terme en $\tilde{y}'$ s'annule et on est ramené au cas des coefficients constants.

Indications. Pour retrouver une primitive de $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ si on a oublié :

$$\begin{aligned}\sinh^2 u+1 &= \cosh^2 u\\ \cosh' &= \sinh\end{aligned}$$

Exercice 101. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$y'\sin^3 x-2y\cos x=\cos x. \tag{16}$$

Quelle est la dimension de l'espace (affine) des solutions ?

Indications. Une solution particulière est $y=-\frac{1}{2}$, ce qui nous ramène à l'équation homogène. On pourra commencer par résoudre l'équation homogène sur les intervalles $I_k=\left]k\pi,(k+1)\pi\right[$ puis raccorder les solutions. Le raccordement se passe tellement bien qu'il est automatique (les solutions sont très « plates » au voisinage de $k\pi$), ce qui donne un espace de solutions globales de dimension infinie !

Exercice 102. Résoudre sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ l'équation

$$2xy'+y=\frac{1}{1-x}. \tag{17}$$

Indications. Commencer par résoudre l'équation homogène sur $]0,+\infty[$ (resp. sur $]-\infty,0[$). Varier la constante sur $]-\infty,0[$, $]0,1[$ et $]1,+\infty[$ séparément. A ce stade, on obtient comme candidats

$$y(x)=\begin{cases}\alpha/\sqrt{-x}+\left(\arctan\sqrt{-x}\right)/\sqrt{-x} & \forall x<0\\ \beta/\sqrt{x}+\left(\operatorname{argth}\sqrt{x}\right)/\sqrt{x} & \forall x\in\,]0,1[\\ \gamma/\sqrt{x}+\left(\operatorname{argth}\sqrt{x}\right)/\sqrt{x} & \forall x>1.\end{cases}$$

Au voisinage de 0, $\arctan z\sim\operatorname{argth} z\sim z$, donc le second terme dans les deux premiers cas se prolonge bien par continuité avec limites 1 à gauche et à droite. La condition de limite en 0 impose $\alpha=\beta=0$.

Remarque. Au voisinage de 1 on ne saurait raccorder, car $\tanh z\sim 1-e^{-2z}$ pour $z\to+\infty$, donc argth croît très, très vite et l'on ne peut pas compenser avec γ.

Exercice 103 (Ecole polytechnique ∼2005 — Etude de $xy'+\lambda y=\frac{1}{1+x}$)**.** Soit $\lambda>0$, on considère l'équation différentielle

$$xy'+\lambda y=\frac{1}{1+x}. \tag{18}$$

1. Déterminer les solutions sur $]0,+\infty[$ sous forme intégrale. Montrer qu'il existe une unique solution ayant limite finie au voisinage de 0^+.
2. Trouver les solutions qui sont sommes de série entière au voisinage de 0. En déduire la valeur de
$$S=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2^{3n}\,(3n+1)}.$$

Indications. 1. L'équation homogène a pour solutions $x\mapsto \alpha x^{-\lambda}$. La variation de la constante donne l'espace des solutions
$$x\mapsto x^{-\lambda}\left(\alpha+\int_0^x\frac{t^{\lambda-1}}{1+t}dt\right)\qquad \alpha\in\mathbb{R}$$
L'intégrale est bien définie d'après le critère de Riemann, vu que $\lambda>0$ (On peut aussi remplacer le paramètre α par une borne variable dans l'intégrale). Cette solution admet une limite en 0 ssi $\alpha=0$.

2. Observer que $\frac{1}{1+x}$ est développable en série entière avec rayon de convergence 1 ; raisonner par condition nécessaire pour en déduire que si $\sum a_n x^n$ est solution alors
$$\forall n\in\mathbb{N},\ a_n=\frac{(-1)^n}{n+\lambda}$$
a posteriori, le rayon de convergence est 1. Par unicité dans le théorème de Cacuhy et Lipschitz on obtient alors
$$\forall x\in\,]0,1[\,,x^{-\lambda}\int_0^x\frac{t^{\lambda-1}}{1+t}dt=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+\lambda}x^n \tag{19}$$
(Ce qui s'obtiendrait aussi directement en développant $\frac{1}{1+t}$ en série entière dans l'intégrale de gauche et en intervertissant $\sum$ et $\int$, à condition de justifier) La somme demandée s'obtient avec $\lambda=1/3$ et $x=1/8$. On pourra calculer $\int_{[0,1]}\frac{\mathrm{d}u}{1+u^3}$à l'aide de la décomposition en éléments simples (sur $\mathbb{R}$)
$$\frac{1}{1+u^3}=\frac{1}{3}\frac{1}{1+u}-\frac{1}{3}\frac{-2+u}{u^2-u+1}$$
Finalement, $S=\frac{\ln 3}{6}+\frac{\pi\sqrt{3}}{18}$.

Exercice 104 (*)**.** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $p:I\to\mathbb{R}_+$ une fonction continue. On considère l'équation différentielle sur I
$$y''+py=0\qquad (E_p)\,.$$

1. Soient $p_1\le p_2$, et deux solutions de (E_{p_1}) et (E_{p_2}) respectivement nommées φ_1 et φ_2. On suppose que φ_1 admet deux zéros $a<b$ dans I. Montrer que φ_2 s'annule sur $[a,b[$ et sur $]a,b]$.
2. On suppose ici que I est compact de longueur ℓ et $p>0$. Soit φ une solution non nulle de (E_p). On note $m=\inf_I p$ (resp. $M=\sup_I p$), montrer que
$$\left\lfloor\frac{\ell\sqrt{m}}{\pi}\right\rfloor\leqslant Z(\varphi)\leqslant\left\lceil\frac{\ell\sqrt{M}}{\pi}\right\rceil$$
où $Z(\varphi)$ le nombre de zéros de φ sur I.
3. Soit φ une solution non nulle de $(E_{\exp})$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que φ admet une infinité de zéros sur $\mathbb{R}_+$ paramétrables par une application croissante $\alpha:\mathbb{N}\to\mathbb{R}_+$. Donner un équivalent de α_n.

S. Géométrie euclidienne et calcul différentiel

Exercice 105 (Théorème spectral par le calcul différentiel)**.** Soit E un espace euclidien, S sa sphère unité et u un endomorphisme symétrique de E. On pose $f(x) = \langle u(x) \mid x \rangle$ pour tout $x \in E$.

1. Montrer que f est différentiable et calculer sa différentielle, puis son gradient en tout point.
2. Soit $x \in S$ tel que $f(x)$ est maximal global de f sur S (pourquoi un tel x existe-t-il ?). Montrer que $\nabla f(x)$ est colinéaire à x, puis que x est vecteur propre de u.
3. Montrer que u admet une base orthonormée de vecteurs propres.

Indications. 1. f est polynômiale (homogène de degré 2 dans un système quelconque de coordonnées) donc différentiable. Pour la différentielle en x, on pourra développer par bilinéarité (en utilisant la symétrie de u)

$$\langle u(x+h) \mid x+h \rangle - \langle u(x) \mid x \rangle$$

On trouve $\nabla f(x) = 2u(x)$

2. La sphère unité est compacte. On pourra introduire, pour tout $h \in \{x\}^{\perp}$, la fonction

$$f_h(t) = f((\cos t)\, x + (\sin t)\, h)$$

et montrer que $f_h'(0) = 0$; on en déduit que le plan affine tangent à S en x est orthogonal à $\nabla f(x)$. Utiliser la question précédente.

3. Procéder par récurrence : Si F est un sous-espace stable par u, alors $F^{\perp}$ aussi. La question précédente amorce la récurrence.

Remarque. La situation de la question 2 est une condition d'extremum lié. On en rencontre une autre plus compliquée dans l'exercice suivant.

Exercice 106 (Inégalité de Hadamard par le calcul différentiel)**.** On se place dans $E = \mathbb{R}^n$ canoniquement euclidien. Pour toute $(v_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ famille de n vecteurs, soit $f(v_1, \ldots, v_n)$ le déterminant de $v_1, \ldots v_n$ (par rapport à la base canonique).

1. Montrer que f est différentiable sur E^n et exprimer $\mathrm{d}f(v_1, \ldots v_n)(h_1, \ldots h_n)$ en terme de déterminants.
2. Montrer que f atteint son maximum sur l'ensemble

$$\Pi = \{(v_i) \in E^n,\ \|v_1\| = \cdots = \|v_n\| = 1\}$$

puis que celui-ci est > 0.

3. Soit $(u_1, \ldots u_n)$ où f atteint son maximum. Montrer qu'il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$\mathrm{d}f(u_1, \ldots u_n)(h_1, \ldots, h_n) = \lambda_1 \langle u_1, h_1 \rangle + \cdots + \lambda_n \langle u_n, h_n \rangle .$$

En déduire que les (u_i) forment une famillle orthonormée

4. Montrer l'inégalité de Hadamard :

$$|\det(v_1, \ldots, v_n)| \leqslant \|v_1\| \cdots \|v_n\| .$$

Décrire le cas d'égalité.

5. Quel est l'infimum de la fonction $\varphi : M \mapsto \mathrm{Tr}\ {}^t M M$ sur le groupe $\mathbf{SL}(n, \mathbb{R})$, est-il atteint et si oui à quel endroit ?

Indications. 1. Utiliser que f est n-linéaire.

2. Utiliser que Π est compact (en tant que produit fini de compacts) et que f est continue.
3. On pourra s'inspirer de la question 2 de l'exercice précédent pour montrer que

$$\mathrm{d}f\left(u_1,\ldots,u_n\right)\left(h_1,\ldots,h_n\right)=0$$

si $u_i \perp h_i$ pour tout i, puis que $\lambda_i \geqslant 1$ et enfin $\langle u_i \mid u_j\rangle = 0$ si $i \neq j$ en évaluant la différentielle sur $h_i = \delta_{ij}u_i$ et $h_i = \delta_{ij}u_j$ par comparaison avec l'expression trouvée en 1.
4. Utiliser l'homogénéité pour se ramener à $(v_1,\ldots v_n) \in \Pi$ puis appliquer ce qui précède. Le cas d'égalité correspond aux familles orthogonales.
5. Le minimum est 1 et il est atteint sur $\mathbf{O}_n$.

Remarque. L'inégalité de Hadamard est d'un intérêt considérable pour le calcul de déterminant. En effet, donnons nous par exemple $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ dont on veut connaître le déterminant : l'échelonnage par l'algorithme du pivot de Gauss est efficace (complexité $\mathcal{O}\left(n^3\right)$ en termes d'opérations dans $\mathbb{Z}$) mais les coefficients manipulés grandissent très vite. C'est pourquoi si l'on sait borner $\det M$ à l'avance, on peut se contenter de mener les calculs modulo p où $p > |\det M|$ est un nombre premier assez grand [13], ce qui est beaucoup mieux car multiplier les éléments de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ se fait réellement en temps constant.

Exercice 107 (Extremums sur le groupe orthogonal et décomposition polaire)**.** Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ un entier et $M_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice. On définit φ par

$$\begin{array}{rccl}\varphi : \mathbf{O}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ U & \mapsto & \operatorname{tr}\left(UM_0\right).\end{array}$$

1. Montrer qu'il existe $U_0 \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$ en laquelle φ admet un maximum global. Dans la suite, on considère une telle U_0.
2. Soit A une matrice antisymétrique réelle d'ordre n. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $\exp(tA) \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$. En déduire que

$$\operatorname{tr}\left(AU_0M_0\right)=0,$$

puis que la matrice $S_0 = U_0M_0$ est symétrique.
3. Montrer que S_0 est positive, ie ${}^tXS_0X \geqslant 0$ pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, et définie positive si M_0 est inversible.

Indications. 1. Le groupe $\mathbf{O}_n(\mathbb{R})$ est compact (par exemple, car fermé et borné dans un $\mathbb{R}$-evn de dimension finie ; choisir une bonne norme, elle resservira !).

2. On pourra, par exemple, calculer $\exp(-tA)$. Remarquer que $\exp(tA) \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$ et la maximalité de $\varphi(U_0)$ implique pour tout t

$$\varphi\left(\exp(tA)\,U_0\right) \leqslant \varphi\left(U_0\right)$$

Puis faire un DL du terme de gauche pour t au voisinage de 0. La formule $\operatorname{tr}\left(AU_0M_0\right)=0$ s'interprète alors comme une relation d'orthogonalité pour un produit scalaire bien choisi sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

---

13. En fait, dans la pratique on prend plutôt $p_1,\ldots p_n$ des nombres premiers plus grands (en norme quadratique) que chaque colonne, puis on calcule modulo $p_1\cdots p_n$ à l'aide du lemme chinois. Générer de grands nombres premiers n'est trop difficile.

3. Remarquer que ce qu'on a fait jusqu'à présent s'applique à n'importe quel maximum local de la trace sur $\mathbf{O}_n$. Il faut donc exploiter la maximalité globale de $\varphi(U_0)$. On pourra raisonner par l'absurde en supposant que S_0 admet une valeur propre strcitement négative : montrer alors qu'il existe $U_0^{'} \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $\varphi(U_0') > \varphi(U_0)$ en construisant U_0' à partir de la diagonalisation de S_0.

Remarque. Si M_0 est inversible, S_0 est même strcitement positive (ie, ${}^tXS_0X = 0 \implies X = 0$). La décomposition $M_0 = S_0U_0^{-1}$ est alors appelée décomposition polaire[14] de M_0 ; elle est unique. Concrètement, on la calcule numériquement à l'aide d'un algorithme itératif très comparable à la méthode de Newton : S_0 est la racine carrée (au sens des matrices symétriques définies positives) de $M_0{}^tM_0$.

Exercice 108 (* Sur les systèmes différentiels linéaires à solutions bornées)**.** Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ un entier et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice. L'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est muni d'une norme $\|-\|$. On considère X solution du système différentiel linéaire

$$\begin{cases} X' = BX \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

Montrer que s'équivalent

(a): Il existe $\rho > 0$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tout X_0, $\|X(t)\| \leqslant \rho \|X_0\|$

(b): Il existe $\rho' > 0$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$. et pour tout X_0,$\|X(t)\| \geqslant \rho' \|X_0\|$.

(c): Il existe $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$, il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique (i.e., ${}^tA = -A$) telles que

$$A = PBP^{-1}.$$

Indications. D'après le théorème d'équivalence des normes, **(a)**, **(b)** et **(c)** sont des propositions qui ne dépendent pas de la norme choisie. On pourra commencer par remarquer que **(a)** et **(b)** s'équivalent, puis montrer **(c)** $\implies$ **(a)** en dérivant le carré $\|PX(t)\|_2^2$ par rapport au temps. Pour **(a)** $\implies$ **(c)** on pourra remarquer qu'il suffit de montrer que A est diagonalisable et a toutes ses valeurs propres imaginaires pures. La décomposition de Dunford est utile (mais on peut aussi trigonaliser sur $\mathbb{C}$).

Exercice 109 (Ecole polytechnique - Sur les sous-groupes à un paramètre de $\mathbf{SL}(n, \mathbb{R})$)**.** Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie n, et $u : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(E)$ dérivable en tout point. Montrer l'équivalence entre

(a): Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $\det u(x) = 1$ et $u(x+y) = u(x) \circ u(y)$.

(b): $u(0) = \mathrm{Id}_E$, $\mathrm{Tr}\ u'(0) = 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = u(0) \circ u(x)$.

14. Le terme vient de ce qu'elle généralise la décomposition suivante dans $\mathbb{C}^\times$

$$z = u \exp\left(\rho + e^{i\theta}\right)$$

où $u = z/|z|$, $\rho = \ln|z|$et θ est un argument de z. U_0 joue le rôle de $z/|z|$ et S_0 le rôle de $\exp\left(\rho + e^{i\theta}\right)$. On pourra vérifier que toute matrice symétrique définie positive est effectivement une exponentielle, en même temps qu'elle est un carré.

Exercice 110 (Un système différentiel linéaire)**.** Résoudre le système différentiel linéaire suivant :

$$\begin{cases} y_1' & = -2y_1 + y_2 \\ y_2' & = y_1 - 2y_2 + y_3 \\ & \vdots \\ y_{n-1}' & = y_{n-2} - 2y_{n-1} + y_n \\ y_n & = y_{n-1} - 2y_n. \end{cases}$$

Indications. Ceci se réécrit $Y' = SY$ avec S symétrique réelle qu'il s'agit de diagonaliser. S étant tridiagonale, il n'est pas trop téméraire d'allller rechercher directement ses vecteurs propres : les suites de coordonées d'un vecteur propre suivent une équation linéaire récurrente d'ordre 2

$$y_{i-1} - (2+\lambda)\, y_i + y_{i+1} = 0$$

où λ est la valeur propre ; sauf sur les bords ! Si les deux racines de l'équation caractéristique sont distinctes, alors on peut écrire

$$y_k = \alpha\rho_1^k + \beta\rho_2^k$$

Raisonner par condition nécessaire ; on doit obtenir les n valeurs propres distinctes $\lambda_j = -4\sin^2 \frac{j\pi}{2(n+1)}$ et une base de diagonalisation.

Exercice 111 (Théorème de Sturm)**.** On considère les équations différentielles de la forme

$$y'' + p\,(t)\, y = 0 \quad (E_p)\,,$$

où $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue.

1. Si y est une solution non nulle de (E_p), montrer que les zéros de y sont isolés. En particulier il y en a un nombre fini dans tout compact.
2. Soient u et v solutions non nulles respectivement de (E_q) et (E_s) avec $q \leqslant s$. Soit z_1 un zéro de v, z_2 le zéro suivant (bien défini d'après la question précédente). En considérant le wronskien généralisé

$$W\,(u,v)\,(t) = \begin{vmatrix} u\,(t) & v\,(t) \\ u'\,(t) & v'\,(t) \end{vmatrix}$$

Montrer que u s'annule sur $[z_1, z_2]$, puis sur $[z_1, z_2[$ et sur $]z_1, z_2]$. En particulier, montrer que si $q = s$ et u et v sont non colinéaires alors u s'annule sur $]u, v[$.
3. On suppose que p est périodique. Montrer qu'on a l'alternative suivante :
a) Ou bien toute solution non nulle de (E_p) admet une infinité de zéros
b) Ou bien, toute solution de (E_p) possède une infinité de zéros
Puis, qu'on est dans le deuxième cas si $p \geqslant 0$ et $p \neq 0$.

Indications. 1. Utiliser l'unicité à conditions initiales (valeur, dérivée) données en un point dans le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire.

2. Dériver le wronskien, montrer que si u est de signe constant alors il est monotone ; obtenir une contradiction si u est de signe constant et ne s'annule pas. On pourra utiliser le lemme des pentes : $v'\,(z_1)$ et $v'\,(z_2)$ sont (non nuls et) de signes opposés.
3. Utiliser le lemme d'entrelacement (question précédente) pour montrer que si une solution non nulle admet deux zéros, alors toutes les solutions en ont une infinité (on pourra considérer les translatés de la période de p). Si $p \geqslant 0$ et $p \neq 0$, prendre $a \in \mathbb{R}$ tel que $p\,(a) > 0$ et considérer la solution aux conditions initiales

$$\begin{aligned} y\,(a) &= 1 \\ y'\,(a) &= 0 \end{aligned}$$

. Montrer qu'elle a deux zéros.

Remarque. Considérons la famille d'équations du type

$$y'' + r\,(t)\,y' + q\,(t)\,y = 0 \quad (E_{r,q})$$

Si r et q sont suffisament régulières, on peut se ramener à une équation du type (E_p) à l'aide d'un changement de fonctions. Dans les cas favorables, le théorème de Sturm donne des encadrements sur le nombre de zéros dans un intervalle donné.

T. Probabilités 1 - v.a. discètes, indépendance, conditionnement

Exercice 112 (Transmission de l'information)**.** On considère n personnes $I_1, \dots I_n$. I_1 entend une information sous la forme « oui » ou « non » (un bit) qu'il communique à I_2, puis I_2 communique à I_3... ainsi de suite jusqu'à I_n qui l'écrit sur le tableau. Chacun transmet l'information qu'il a entendue avec probabilité p et se trompe avec probabilité $1-p$. Quelle est la probabilité que l'information écrite par I_n soit correcte ?

Indications. Les méthodes sont multiples. Dans tous les cas, vérifier la cohérence du résultat obtenu avec $p=0$, $p=1$, $p=1/2$.

a. On pourra prendre $\Omega = \mathcal{P}(\{1, \dots, n\})$ l'univers des ensembles de personnes qui se trompent. Un germe de probabilité est donné par $g(\omega) = (1-p)^{|\omega|} p^{n-|\omega|}$. La probabilité que l'information soit bien transmise est $P(|\omega| \text{ est pair})$, on est donc ramené à calculer

$$\sum_{k \text{ pair}} \binom{n}{k} (1-p)^k p^{n-k} = \frac{1}{2}\left[(1-p+p)^n + (p-1+p)^n\right] = \frac{1+(2p-1)^n}{2}$$

b. Notons x_k la probabilité que I_k dise « oui » et y_k la probabilité que I_k dise « non » ; alors on pourra montrer (si nécessaire à l'aide de la formule des probabilités totales) que

$$\left(x_{k+1}\ y_{k+1}\right) = \left(x_k\ y_k\right) \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix} = \left(x_k\ y_k\right) P$$

De sorte qu'on est ramené à calculer les puissances de la matrice P. Indice : elle est symétrique réelle, et 1 est valeur propre...

Exercice 113. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, soient X et Y de Ω dans $\mathbb{N}\setminus\{0\}$ deux variables aléatoires telles que $X \leqslant Y$ et pour tout $n \geqslant 1$, $P(Y=n) \neq 0$. On suppose que la loi conditionnelle de X par rapport à la réalisation de $Y=n$ est la loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$.

1. Montrer que X et $Y-X+1$ suivent la même loi
2. On suppose que X suit une loi géométrique de paramètre p, ie
$$P(X=n) = (1-p)^{n-1} p$$
Montrer qu'alors les variables X et $Y-X+1$ sont indépendantes.
3. Réciproquement, on suppose que X et $Y-X+1$ sont indépendantes. Montrer qu'elles suivent une loi géométrique de même paramètre.
4. On suppose que Y est d'espérance finie. Montrer que X est d'espérance finie et que
$$\mathbb{E}[X] \leq \frac{1+\mathbb{E}[Y]}{2}$$
Cas d'égalité ?

Indications. 1. Ecrire la formule des probabilités totales pour X et pour $Y-X+1$.

2. D'après le cours, il suffit de montrer que pour tous $(k,n) \in \mathbb{N}^{\star 2}$
$$P(X=k,\ Y-X+1=n) = P(X=k)\, P(Y=n)$$
3. Poser $p = P(X=1)$ et procéder par récurrence. On peut aussi reformuler et montrer que cela revient à imposer que X est sans mémoire.

4. Il s'agit de montrer que la famille $\left(\frac{k}{n}P\left(Y=n\right)\mathbf{1}_{n\geqslant k}\right)_{(k,n)\in\mathbb{N}^{\star 2}}$ est sommable. Faire porter d'abord la somme sur k, ensuite sur n et utiliser que Y est d'espérance finie ; on peut écrire
$$\mathbb{E}\left[X\right]=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(n+1\right)P\left(Y=n\right).$$

Exercice 114 (Calculs d'espérances conditionnelles)**.** Soient X et Y deux variables indépendantes suivant les lois binomiales respectives $\mathcal{B}\left(n_1,p\right)$ et $\mathcal{B}\left(n_2,p\right)$ d'un même paramètre $p\in[0,1]$.

1. Calculer la loi de X conditionnellement à $X+Y=n$.
2. Calculer l'espérance de X sachant $X+Y=n$
3. Mêmes questions avec X et Y indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs $\lambda>0$ et $\mu>0$. On rappelle que cela signifie
$$P\left(X=k\right)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}.$$

Indications. 1. On pourra (re)démontrer que $X+Y$ suit la loi $\mathcal{B}\left(n_1+n_2,p\right)$, ceci n'est d'ailleurs pas étranger du fait que $\mathcal{B}\left(n,p\right)$ est la loi suivie par la somme de n Bernoulli indépendantes. Puis utiliser la définition de probabilité conditionnelle ; on doit trouver
$$P\left(X=k\mid X+Y=n\right)=\frac{\binom{n_1}{k}\binom{n_2}{n-k}}{\binom{n_1+n_2}{n}}.$$

2. On pourra utiliser (ou redémontrer) la formule de convolution de Vandermonde. On doit trouver
$$\mathbb{E}\left[X\mid X+Y=n\right]=\frac{n_1}{n_1+n_2}n.$$

3. De même, vérifier que $X+Y$ suit la loi $\mathcal{P}\left(\lambda+\mu\right)$. On doit trouver
$$\mathbb{E}\left[X\mid X+Y=n\right]=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}n.$$

Exercice 115 (* Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ et théorème du scrutin)**.** Soit N un entier naturel, $X_1,\dots X_N$ des variables aléatoires à valeurs dans $\{\pm1\}$, indépendantes et de même loi uniforme. On écrit
$$S_n=\sum_{k=1}^{n}X_k.$$

1. Calculer la loi de S_n pour $0\leqslant n\leqslant N$. On pourra faire intervenir des coefficients binomiaux.
2. (Principe de réflexion) Soient n_1 et n_2 deux entiers naturels tels que $0\leqslant n_1<n_2\leqslant N$, et k_1,k_2 entiers naturels non nuls. On appelle chemin de (n,k) à (n',k') une suite $\left(c_\nu\right)_{n\leqslant\nu\leqslant k}$ telle que $c_{\nu+1}=c_\nu\pm1$, $c_n=k$ et $c_{n'}=k'$. Un chemin est dit positif si $c_\nu\geqslant0$ pour tout ν. Montrer que le nombre de chemins de $(n_1,-k_1)$ à (n_2,k_2) est égal au nombre de chemins positifs de (n_1,k_1) à (n_2,k_2) et qui s'annulent au moins une fois. En déduire
$$\mathbb{P}\left(\forall n\in\{n_1,\dots n_2\},S_n\geqslant0\mid S_{n_1}=k_1,S_{n_2}=k_2\right).$$
3. On dépouille un scrutin à deux candidats. Sachant que le candidat A (resp. B) a reçu a (resp. b) voix avec $a>b$, montre que la probabilité que A soit resté en tête (ou a égalité) tout au long du dépouillement est égale à
$$P=\frac{a-b}{a+b}.$$

Indications. 1. Observer que $P(S_n = k) = 0$ si $|k| > n$ ou si n et k n'ont pas même parité. Pour le reste, $\frac{S_n - n}{2}$ suit une loi binomiale de paramètre $1/2$.

2. Il s'agit ici d'une question de combinatoire. Il est très vivement conseillé de faire un dessin : raisonner sur le établir une bijection entre les chemins (n_1, k_1) à (n_2, k_2) en restant au-dessus de l'axe des temps et ceux reliant $(n_1, -k_1)$ à (n_2, k_2).
3. Montrer (par exemple) que l'on peut se ramener à la question précédente avec $n_1 = k_1 = 1$, $n_2 = a + b$ et $k_2 = a - b$.

Exercice 116 (Temps d'apparition d'un motif)**.** 1. Soit T une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que T est d'espérance finie si et seulement si la série de terme général $P(T > k)$ converge et qu'alors

$$E[T] = \sum_{k \geqslant 0} P(T > k).$$

2. On place un singe dactylographe devant une machine à écrire à trois touches A, B et C sur laquelle le singe tape complètement au hasard. On pose $\Omega = \{A, B, C\}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des mots que le singe peut taper ; on pourra admettre [15] qu'il existe une unique probabilité sur Ω telle que si $U \subset \Omega$ est l'ensemble des mots commençant par le préfixe $\omega \in \{A, B, C\}^{\ell}$ alors $P(U) = 3^{-\ell}$. On définit T variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ telle que T est le premier temps au bout duquel le singe a tapé « ABCAB ». Montrer que T est presque sûrement dans $\mathbb{N}$.
3. Montrer que
$$P(T \geqslant n) = P(T = n + 2) + P(T = n + 5).$$
En déduire que T (vue comme à valeurs dans $\mathbb{N}$) est d'espérance finie et que
$$E[T] = 252.$$

Indications. 1. On pourra, soit utiliser la technique de transformation d'Abel, ou encore écrire
$$\sum_{n=1}^{N} nP(T = n) = \sum_{n=1}^{N} P(T = n) \sum_{k=1}^{n} 1 = \sum_{k=1}^{N} P(T \geqslant k),$$
et appliquer le théorème de la limite monotone.

2. La probabilité que le singe tape le motif sur la tranche située entre la $(5k+1)^e$ et la $(5k+5)^e$ lettre (comprises) est $p = 3^{-5} > 0$; et ces évènements sont indépendants, on a donc
$$P(T \leqslant 5n) \geqslant 1 - (1 - p)^N,$$
qui tend vers 1 quand $n \to +\infty$
3. D'après la première question on cherche la somme de la série de terme général $P(T > k)$. On pourra sommer juqu'à l'infini l'expression obtenue à la question précédente.

15. En dépit des apparences, le cadre théorique de cet exercice est hors-programme.

U. Probabilités 2 - Variance, séries génératrices

Exercice 117 (ESCP-EAP 2002)**.** Soit X à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que si X admet un moment d'ordre 2 alors

$$E\left[X^2\right] = \sum_{k=0}^{+\infty} (2k+1)\, P\,(X > k)\,.$$

Réciproquement, montrer que la série de terme général $(2k+1)\,P\,(X > k)$ converge ssi X admet un moment d'ordre 2.

Indications. On pourra par exemple écrire

$$\sum_{k=0}^{N} k^2 P\,(k = n) = \sum_{k=0}^{N} k^2 \left[P\,(k \geqslant n) - P\,(k \geqslant n+1)\right],$$

puis scinder en deux sommes (technique de la transformation d'Abel).

Exercice 118 (Trace et déterminant aléatoires)**.** Soit n un entier naturel et $(X_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une famille de variables aléatoires indépendantes et telles que pour tous i, j

$$\mathbb{P}\,(X_{i,j} = 1) = \mathbb{P}\,(X_{i,j} = -1) = \frac{1}{2}.$$

Soient T_n et D_n les variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{Z}$ données par

$$\begin{aligned} T_n &= \operatorname{tr}\left((X_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\right) \\ D_n &= \det\left((X_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\right). \end{aligned}$$

1. Montrer que D_n et T_n sont bornées et centrées ; en particulier elles admettent des moments d'ordre 2.
2. Calculer $\operatorname{Var}(T_n)$ et $\operatorname{Var}(D_n)$.
3. Vérifier que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\,(|T_9| \geqslant 6) &\leq 1/4 \\ \mathbb{P}\,(|D_4| \geqslant 15) &< 1/9. \end{aligned}$$

Indications. 1. On montre sans problème $|T_n| \leqslant n$ et $|D_n| \leqslant n!$ (ou mieux, $|D_n| \leq (\sqrt{n})^n$ à l'aide de l'inégalité de Hadamard). Pour montrer $\mathbb{E}\,[T] = 0$, resp. $\mathbb{E}\,[D] = 0$ on pourra s'intéresser au vecteur aléatoire $(-X_{i,j})$, resp. au vecteur aléatoire $\left((-1)^{\delta_{i,n}}\, X_{i,j}\right)$).

2. Pour T_n : les $X_{i,i}$ sont mutuellement indépendantes et de variance 1. Pour D_n, montrer

$$\operatorname{Var}(D_n) = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \sum_{\rho\in\mathcal{S}_n} \epsilon\,(\sigma)\, \epsilon\,(\rho)\, \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{n} X_{i,\sigma(i)} X_{i,\rho(i)}\right],$$

et distinguer selon que $\sigma = \rho$ ou pas. On rappelle que indépendants $\Longrightarrow$ non corrélées.

3. On pourra utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Pour D_4, on pourra remarquer que $\sigma = \sqrt{24} < 5$.

Remarque. On peut calculer les probabilités demandées à la question 3 de manière exacte (pour D_4, observer qu'on est dans le cas d'égalité de l'inégalité de Hadamard) ; alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\,(|T_9| \geqslant 6) &= 5/128 \approx 0.039 \\ \mathbb{P}\,(|D_4| \geqslant 15) &= 3/256 \approx 0.012, \end{aligned}$$

ce qui est nettement plus petit que les estimations données par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev ; le comportement de concentration vers la moyenne est plus grand.

Exercice 119 (Véridique !)**.** Avant de se séparer, les n polytechniciens $x_1, \ldots x_n$ d'une même promotion (disons $n = 499$) se retrouvent traditionnellement sur la cour d'honneur pour la photo du lancer de bicorne : chacun lance son bicorne (le plus haut possible) puis récupère l'un des bicornes qui retombent. L'un(e) d'entre eux déclare : « la probabilité que je ne récupère pas mon bicorne est $(1 - 1/n)$; la probabilité que personne ne retrouve son bicorne est donc $(1 - 1/n)^n$, c'est donc $1/e$ avec une erreur d'au plus 10^{-1000} »

1. Montrer que le raisonnement n'est pas correct, mais que le résultat est le bon.
2. Quel est l'espérance du nombre de bicornes qui retrouvent leur propriétaire ?

Indications. 1. Les évenements A_i : « x_i ne retrouve pas son bicorne » ne sont pas indépendants : si $n-1$ polytechniciens retrouvent leur bicorne, alors le dernier aussi. Une autre manière d'aborder le problème est de considérer l'évenement complémentaire B : « quelqu'un retrouve son bicorne » pour lequel on utilise la formule de Poincaré avec les évènements B_i : « x_i retrouve son bicorne » , on a donc :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B_i) - \sum_{i<j} \mathbb{P}(B_i \cap B_j) + \cdots + (-1)^n \mathbb{P}(B_1 \cap \cdots \cap B_n)$$

On pourra ensuite vérifier que si $i_1 < \cdots < i_k$ alors

$$\mathbb{P}(B_{i_1} \cap \cdots \cap B_{i_k}) = \frac{\text{Nombre de permutations } \sigma \in S_n \text{fixant } i_1, \ldots i_k}{\text{Nombre de permutations } \sigma \in \mathcal{S}_n},$$

de sorte que

$$\mathbb{P}(B) = 1 - \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!} \approx 1 - \frac{1}{e}.$$

La différence étant bornée par le dernier terme (série alternée) la précision de l'approximation est au moins 1/500!. Une minoration brutale donne

$$\begin{aligned} 500! &\geqslant 10^{90}100^{100}200^{100}300^{100}400^{100} \\ &= 10^{90}10^{800}2^{100}3^{100}4^{100} \\ &= 10^{890}2^{100}12^{100} \\ &\geqslant 10^{990}2^{100} \\ &= 10^{990}16^{25} \geqslant 10^{1015}. \end{aligned}$$

En fait, on peut vérifier que $500! \approx 1.2 \times 10^{1134}$ par exemple à l'aide de la formule de Stirling.

2. Soit X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si x_i retrouve son bicorne et 0 sinon (fonction caractéristique de B_i avec les notations de la question précédente). On veut calculer

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i].$$

Vu que X_i est une variable de Bernoulli, il ne reste qu'à calculer son paramètre ; ceci vaut $1/n$, de sorte que l'espérance demandée est 1.

Exercice 120 (Dés truqués)**.** 1. On jette deux dés indépendants non pipés. Calculer la loi suivie par la somme des points.

2. Est-il possible de truquer deux dés indendants de manière à ce que la somme des points obtenue soit équirépartie sur $\{2, \ldots 12\}$?

Indications. Pour cet exercice il est commode d'utiliser des séries génératrices, bien que la première question au moins puisse se traiter par simple dénombrement.

1. D'après le cours, la série génératrice de la somme est le produit des séries génératrices des deux dés. Comme il s'agit de polynômes, on a donc à effectuer un produit de convolution
$$\mathbb{P}(X+Y=k)=\sum_{i=1}^{k-1}\mathbb{P}(X=i)\,\mathbb{P}(Y=k-i)\,,$$
ce qui donne le résultat.
2. Ecrivons $S=X+Y$ où X et Y sont les résultats des deux dés pipés. On veut que S suive une loi uniforme, soir
$$G_X(s)\,G_Y(s)=\frac{1}{11}\sum_{k=2}^{12}s^k=\frac{s^2}{11}\frac{s^{11}-1}{s-1}.$$
Or, G_X et G_Y sont sans terme constant (on ne peut pas obtenir 0 en tirant un dé !). Ecrivons donc $G_X(s)=s\phi_X(s)$ et $G_Y(s)=s\phi_Y(s)$, nous avons
$$\frac{1}{11}\frac{s^{11}-1}{s-1}=\phi_X(s)\,\phi_Y(s)\,.$$
Le polynôme a gauche a toutes ses racines complexes non réelles. Comme on veut $\mathbb{P}(S=12)>0$, ϕ_X et ϕ_Y sont tous les deux de degré 5 ; ils ont donc chacun au moins une racine réelle. Ceci amène une contradiction.

Exercice 121 (*)**.** Dans une usine, une machine produit n pièces qu'elle stocke aléatoirement dans n boîtes, où n est très grand. Chaque pièce est envoyé dans une boîte de façon équiprobable ; ainsi à la fin, une même boîte peut contenir plusieurs pièces. Soit N_i le nombre de pièce dans la i-ième boîte, et $N=\max_{i\in\{1,\dots n\}}N_i$. On souhaite ici montrer que quand $n\to+\infty$,
$$\mathbb{E}[N]=\mathcal{O}\left(\frac{\ln n}{\ln\ln n}\right)$$

1. Quelle est la proportion moyenne de boîtes vides ?
2. Les N_i sont-elles mutuellement indépendantes ? Montrer qu'elles suivent la même loi que l'on calculera.
3. Montrer que $\mathbb{P}(N=k)\leqslant\frac{n}{k!}$
4. Soit $\alpha\in[1,n]$, montrer que $\mathbb{E}[N]\leq n\mathbb{P}(N>\alpha)+\alpha$ et que $\mathbb{P}(M>\alpha)\leqslant n^2/\lceil\alpha\rceil!$, puis
$$\mathbb{P}(M>\alpha)\leqslant n^2\left(\frac{e}{\alpha}\right)^\alpha$$
5. Montrer qu'il existe une suite (α_n) positive de limite $+\infty$ et telle que
$$\left(\frac{e}{\alpha_n}\right)^{\alpha_n}=\frac{1}{n^3}$$
Trouver un équivalent de α_n et conclure.

Indications. 1. La variable aléatoire X_i telle que $X_i=1$ si $N_i=0$ et $X_i=0$ sinon suit une loi de Bernoulli de paramètre $(1-1/n)^n$. Le nombre de boîtes vides est $M=\sum_i X_i$; son espérance est
$$\mathbb{E}[M]=n\,(1-1/n)^n$$
qui possède un équivalent bien connu.

2. Non, par exemple $\mathbb{P}(N_1 = n \text{ et } N_2 = 1) = 0$ c'est différent de $\mathbb{P}(N_1 = n)\mathbb{P}(N_2 = 1)$ qui est petit mais non nul. Par « symétrie », les N_i suivent même loi, plus précisément
$$\mathbb{P}(N_i = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$
3. On pourra remarquer que l'évenement $N = k$ est contenu dans l'union des évènements $N_i = k$ d'où
$$\mathbb{P}(N = k) \leqslant \sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(N_i = k) \leqslant \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{k!}$$
4. La première inégalité sur $\mathbb{E}[N]$ s'obtient à l'aide de la même technique que dans la preuve de l'inégalité de Markov. La seconde, en sommant la précédente inégalité pour k allant de $\lceil\alpha\rceil$ à n. Enfin, on pourra démontrer (par récurrence ou bien à l'aide d'une comparaison série-intégrale) l'inégalité
$$\left(\frac{k}{e}\right)^k \leqslant k!,$$
valable pour tout $k \geqslant 3$.
5. La fonction $f : x \mapsto (e/x)^x$ est strictement décroissante et bijective de $[1, +\infty[$ sur $]0, 1]$; d'où l'existence (et l'unicité) de α_n. D'après ce qui précède,
$$n\mathbb{P}(N > \alpha_n) \leqslant n^3 f(\alpha_n) = 1 = o(\alpha_n)$$
et on sait donc majorer $\mathbb{E}[N]$ par un équivalent de α_n. D'après la question précédente, $\alpha_n = o(n)$. Plus précisément, en passant au log,
$$\alpha_n(1 - \ln\alpha_n) = -3\ln n$$
d'où $\alpha_n \ln\alpha_n \sim 3\ln n$ et en passant encore au log, $\ln\alpha_n + \ln\ln\alpha_n \sim \ln\ln n$. Finalement,
$$\alpha_n \sim 3\frac{\ln n}{\ln\alpha_n} \sim 3\frac{\ln n}{\ln\ln n}.$$

V. Probabilités 3

Exercice 122. Soit $A = \{a_1, \dots a_n\}$ un ensemble d'entiers naturels non nuls, premiers entre eux dans leur ensemble, et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi, à valeurs dans A. On suppose de plus que $\mathbb{P}(X_1 = a_i)$ est non nul pour tout i. On pose g la fonction génératrice commune des X_i.

1. Montrer que $z \mapsto 1 - g(z)$ est une fonction polynômiale sur $\mathbb{C}$, sans racine de module $\leqslant 1$, sauf 1.
2. Soit A_n l'évènement
$$A_n = \left\{\exists N,\ \sum_{k=1}^{N} X_k = n\right\}.$$
Montrer que pour tout z dans le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$, la série $\sum \mathbb{P}(A_n) z^n$ converge ; calculer sa somme en fonction de g.
3. En calculant de deux manières différentes le coefficient au pôle en 1 de la fraction rationnelle $\frac{g(z)}{1-g(z)}$, obtenir :
$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) = \frac{1}{\mathbb{E}[X_1]}.$$
En déduire qu'il existe n_0 tel que tout $n \geqslant n_0$ est somme d'éléments de A.

Exercice 123 (* ENS [16])**.** Soit G un groupe fini non abélien. On note p la probabilité que deux éléments choisis uniformément dans G commutent.

1. Calculer p pour $G = \mathcal{S}_3$ (qui est le plus petit groupe non-abélien).
2. Montrer que le cardinal du centre $\mathcal{Z}(G)$ est au plus $\frac{1}{4}$ du cardinal de G.
3. Montrer que
$$p = \frac{\text{Nombre de classes de conjuguaison de } G}{\text{Cardinal de } G}.$$
On rappelle qu'une classe de conjuguaison est une classe d'équivalence pour la relation
$$g \sim g' \iff \exists h \in G, g' = hgh^{-1}.$$
4. En déduire que $p \leqslant 5/8$.
5. Montrer que le cas d'égalité est atteint.

Exercice 124 (*)**.** Un tyran a enfermé les 32 élèves de la classe de MP* dans son cachot. Toutefois c'est un tyran amateur de mathématiques, et il souhaite leur offrir une opportunité de retrouver la liberté. Pour cela, chaque élève devra successivement passer dans une pièce attenante ou sont disposées 32 boîtes numérotées contenant les noms des élèves de la classe. Il devra retrouver la boîte qui contient son nom ; il pourra en ouvrir 20, mais pas une de plus et n'aura par la suite aucun moyen de communiquer d'information à ceux qui le suivent.

Sachant que les élèves peuvent se concerter à l'avance, donner une stratégie permettant d'assurer plus de 50% de chances que tout le monde retrouve son nom (on donne $\ln \frac{5}{8} \approx -0.47$.)

16. Cet exercice a semble-t-il été donné en 2010, ce qui montre s'il était besoin que les ENS n'ont pas attendu le nouveau programme ! toutefois, ce n'est pas tant un exercice de probabilités qu'un exercice sur les groupes finis.

W. Révisions

Exercice 125. Soit G un groupe fini d'ordre impair. Montrer que tout élément de G est un carré.

Exercice 126. Que dire d'une fonction qui est limite uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une suite de fonctions polynômiales ? Même question avec une fonction qui est limite uniforme sur tout compact de fonctions polynômiales.

Exercice 127. Déterminer l'ensemble des matrices $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ à coefficients positifs.

Exercice 128 (ENS Cachan)**.** (Etudier la convergence de la suite $\left(\frac{1}{n \sin n}\right)_{n \geqslant 1}$. *On admettra $\pi \notin \mathbb{Q}$, c'est au programme.*

Exercice 129. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Donner le reste de la division euclidienne de $(\cos\theta + (\sin\theta) X)^n$ par $X^2 + 1$

Exercice 130. Soit $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle qu'il existe P polynôme de degré impair avec

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \left|f^{(n)}(x)\right| \leq |P(x)|.$$

Montrer que f est nulle. Peut-on affirmer la même chose si P est de degré pair ?

Exercice 131. Déterminer l'ensemble des $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que pour tout $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, $P(A) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. *L'exercice 137, plus difficile, est sur le même thème.*

Exercice 132. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$ entier naturel, l'équation $e^x = n - x$ admet une unique solution qu'on notera u_n. Donner un développement asymptotique à deux termes de la suite u_n.

Exercice 133. Soit $n \geqslant 1$ un entier naturel.

1. Montrer que $\exp : \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \to \mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ est à valeurs dans $\mathbf{SO}(n, \mathbb{R})$ et surjective sur ce groupe.
2. En déduire que $\mathbf{SO}(n, \mathbb{R})$ est connexe par arcs.

Exercice 134 (Centrale)**.** Donner un équivalent quand $n \to +\infty$ de la suite

$$I_n = \int_0^1 \frac{1 - x^n}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)} \mathrm{d}x.$$

Exercice 135 (*)**.** Quelle est la dimension maximale d'un sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé exclusivement de matrices diagonalisables ?

Exercice 136 (*)**.** Soit p un entier naturel non nul. On note S l'ensemble des suites complexes $(u_n)_{n \geqslant 0}$ dont la moyenne de Cesaro converge et telles que $u_n^p \to 1$ quand $n \to +\infty$. Soit φ définie sur S par

$$\varphi(u) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Caractériser $\varphi(S)$.

Exercice 137 (*)**.** Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $P(U) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $P(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$ où $\mathbb{U}$ est le cercle unité de $\mathbb{C}$.
2. Posons $Q(X) = X^p P(1/X)$ où p est le degré de P. Montrer que $PQ = X^p$. En déduire que $P = \pm X^p$.

Indications. Il suffit de montrer que $P(\mathbb{U}_k) \subset \mathbb{U}$ pour tout $k \geq 1$ (où $\mathbb{U}_k$ est le groupe des racines k-ièmes de l'unité dans $\mathbb{C}$) ; on pourra ensuite conclure par continuité de P étant donné que

$$\mathbb{U} = \overline{\bigcup_{k=1}^{+\infty} \mathbb{U}_k}.$$

Exercice 138 (*)**.** Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$ une permutation. Le nombre d'inversions de σ est

$$I(\sigma) = \text{Card}\left\{(i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2 \mid i < j \text{ et } \sigma(i) > \sigma(j)\right\}.$$

1. Montrer que $0 \leqslant I(\sigma) \leqslant \binom{n}{2}$. Pour tout $k \in \left\{0,\ldots \binom{n}{2}\right\}$ existe-t-il σ telle que $I(\sigma) = k$?
2. Soit Σ une permutation aléatoire (loi uniforme sur $\mathcal{S}_n$). Calculer $\mathbb{E}[I(\Sigma)]$

Exercice 139 (*)**.** Montrer que la famille $\left(1, e, e^2\right)$ est libre sur $\mathbb{Q}$.

Indications. On revient au même de montrer que $(e^{-1}, 1, e)$ est libre sur $\mathbb{Q}$. Poure et e^{-1} la convergence de la série est très rapide.

Exercice 140 (* ENS Lyon, ENS Cachan)**.** Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique nulle, et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de trace nulle.

1. Montrer que M est semblable à une matrice de diagonale nulle.
2. Montrer que M est un crochet de Lie, c'est-à-dire s'écrit sous la forme $AB - BA$

Exercice 141 (*)**.** Soit f une fonction continue positive sur $[0,1]$. Pour tout x réel, on pose

$$g(x) = \int_0^1 \sqrt{x^2 + f(t)}\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Donner des équivalents en $\pm\infty$.
2. Montrer que g est dérivable à droite en 0. Exprimer $g'_d(0)$ en faisant intervenir l'ensemble
$$\theta_f = \{t \in [0,1],\ f(t) = 0\}.$$

Exercice 142 (**)**.** Soit A une application de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec $n \geqslant 2$. On pose pour tous $s, t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} C(s,t) &= [A(s), A(t)] = & A(s)A(t) - A(t)A(s) \\ D(t) &= [A(t), A'(t)] = & A(t)A'(t) - A'(t)A(t). \end{aligned}$$

Montrer que $C = 0$ sur $\mathbb{R} \implies D = 0$ sur $\mathbb{R}$. La réciproque est-elle valable ?

Exercice 143 (** Théorème de Korovkin et approximation de Weierstrass)**.** On se place dans l'evn $E = \mathscr{C}([0,1])$ muni de la norme de la convergence uniforme. On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est un opérateur positif (ce que l'on note $u \geqslant 0$) si

$$\forall f \in E,\ f \geqslant 0 \implies u(f) \geqslant 0.$$

1. Donner des exemples d'opérateurs positifs (non nuls !) sur E.
2. Montrer que si u est positif alors il est continu (ce que l'on note $u \in \mathcal{L}_c(E)$)
3. Soit $f \in E$ et $\epsilon > 0$. Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que pour tous $(x,y) \in [0,1]^2$,
$$|f(x) - f(y)| \leq \epsilon + c(y-x)^2.$$
4. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, soit $e_k \in E$ défini par $e_k : x \mapsto x^k$. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite d'opérateurs positifs telle que pour tout k, $u_n(e_k) \to e_k$ quand $n \to +\infty$. Montrer que pour tout $f \in E$, $u_n(f) \to f$.

5. Application : En considérant la suite des polynômes de Bernstein $B_n(f)$ définie pour tout $f \in E$ par

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k},$$

obtenir le théorème d'approximation polynômiale de Weierstrass.

Exercice 144 (** Déterminant de Smith et une remarque de Brauer)**.** Soit $n \geqslant 1$ un entier naturel et $\mathbb{K}$ un corps. Si σ est une permutation de $\mathcal{S}_n$, on désigne par P_σ la matrice de permutation de σ dans $\mathbf{GL}(n, \mathbb{K})$, qui représente l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ donné par $u(e_i) = e_{\sigma(i)}$. L'objectif est de montrer l'équivalence suivante :

$$\sigma \text{ et } \rho \text{ conjuguées dans } \mathcal{S}_n \iff P_\sigma \text{ et } P_\rho \text{ conjuguées dans } \mathbf{GL}(n, \mathbb{K}).$$

1. Montrer le sens direct.
2. Montrer que le nombre de cycles de σ est $\dim_{\mathbb{K}} \ker(P_\sigma - I_n)$ (on compte les points fixes comme des 1-cycles)
3. Pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, on écrit $c_\ell(\sigma)$ le nombre de cycles de taille ℓ dans la décomposition de σ. Montrer que
$$c_\ell(\sigma^m) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{pgcd}(k, m)\, c_\ell(k).$$
4. En déduire le sens indirect en admettant la formule du déterminant de Smith :
$$\det\Big((\operatorname{pgcd}(i,j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}\Big) = \varphi(1) \cdots \varphi(n). \tag{20}$$
5. On cherche à présent à obtenir (20). On introduit pour cela la matrice $A = \left(\mathbf{1}_{i|j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ d'incidence de la relation de divisibilité. Montrer que
$$\sum_{d|m} \varphi(d) = m.$$
En déduire que $S =^t ADA$, où D est la matrice diagonale de coefficients $\varphi(1), \ldots \varphi(n)$; conclure.
6. Si G est un sous-groupe de $\mathcal{S}_n$, on note $\overline{G}$ son image dans $\mathbf{GL}(n, \mathbb{K})$ par le morphisme $\sigma \mapsto P_\sigma$. On suppose que G et H sous-groupes de $\mathcal{S}_n$ sont tels qu'il existe $U \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{K})$ et un isomorphisme
$$\begin{array}{rcl} \Phi_U : \overline{G} & \to & \overline{H} \\ P & \mapsto & UPU^{-1} \end{array}$$
Existe-t-il $\nu \in \mathcal{S}_n$ et un isomorphisme
$$\begin{array}{rcl} \phi_\nu : G & \to & H \\ \rho & \mapsto & \nu\rho\nu^{-1}? \end{array}$$
Sinon, à quelle condition sur G (et éventuellement sur $\mathbb{K}$) ?

Remarque. Je ne connais pas la réponse à la dernière question (même si je crois que c'est non en général). Toute solution ou idée m'intéresse...

X. Correction complète de certains exercices

Correction de l'exercice 70. On se place pour commencer au voisinage de $+\infty$. La condition $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$ impose que pour M assez grand, f réalise une bijection croissante $\mathscr{C}^1$ de réciproque $\mathscr{C}^1$ de $[M,+\infty[$ sur $[f(M),+\infty[$. De plus, notant h sa réciproque, nous avons d'après l'expression de la dérivée d'une composée

$$h'(u) = \frac{1}{f'(h(u))}$$

Par ailleurs, l'expression précédente montre que h est $\mathscr{C}^2$ (sa dérivée seconde se calcule comme dérivée d'un quotient). Posons

$$F(x) = \int_M^x e^{if(t)}\mathrm{d}t$$

Le changement de variables $u = f(t)$ donne

$$F(x) = \int_{f(M)}^{f(x)} e^{iu}h'(u)\,\mathrm{d}u$$

Fixons $y > M$ et intégrons par parties entre y et $x > y$, cela donne :

$$\begin{aligned} F(x) - F(y) &= \left[-ie^{iu}h'(u)\right]_{f(y)}^{f(x)} + \int_{f(y)}^{f(x)} ie^{iu}h''(u)\,\mathrm{d}u \\ &= -\frac{ie^{if(x)}}{f'(x)} + \int_{f(y)}^{f(x)} ie^{iu}h''(u)\,\mathrm{d}u \end{aligned}$$

Le premier terme tend vers 0 si nous faisons $x \to +\infty$. Pour le second, remarquons que f' étant croissante, h' est décroissante. Donc h'' est négative, et $h'' = -|h''|$ de sorte que

$$\left|\int_{f(y)}^{f(x)} ie^{iu}h''(u)\,\mathrm{d}u\right| \leq \int_{f(y)}^{f(x)} |h''(u)|\,\mathrm{d}u = h'(y) - h'(x).$$

Fixons $\epsilon > 0$; il existe y assez grand tel que $h'(y) < \epsilon/2$ et alors pour tout $x > y$ nous avons $|F(x) - F(y)| < \epsilon$. La suite $F(n)$ est bornée, admet une valeur d'adhérence ℓ dans $\mathbb{R}$ qui est unique d'après le calcul précédent (supposer que ℓ et ℓ' sont deux valeurs d'adhérence, poser $\epsilon = \frac{|\ell-\ell'|}{2}$ et obtenir une contradiction si $\epsilon \neq 0$). On en déduit que F admet une limite en $+\infty$, autrement dit l'intégrale

$$I_+ = \int_0^{+\infty} e^{if(t)}\mathrm{d}t$$

est semi-convergente. Au voisinage de $-\infty$, posons $\tilde{f}(x) = f(-x)$ et appliquons le raisonnement précédent. Cela donne que

$$I_- = \int_0^{+\infty} e^{if(t)}\mathrm{d}t$$

est semi-convergente. Finalement

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{if(t)}\mathrm{d}t$$

converge.

Correction de l'exercice 125. Ecrivons l'ordre de G sous la forme $n = 2p - 1$. Soit $g \in G$. D'après le petit théorème de Lagrange, $g^{2p-1} = 1_G$. Mais alors $g^{2p} = g \cdot g^{2p-1} = g$, d'où $(g^p)^2 = g$; g est un carré.

Correction de l'exercice 126. Limite uniforme sur $\mathbb{R}$ — Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ limite uniforme sur $\mathbb{R}$ de la suite $(P_n)_{n\geqslant 0}$ de fonctions polynômiale. Déjà f est continue (c'est une limite uniforme de fonctions continues) mais mieux, f est polynômiale. En effet il existe N assez grand tel que pour tout $n\geqslant N$,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|P_n(x)-f(x)|\leq\frac{1}{2}$$

D'après l'inégalité triangulaire,

$$\forall n\geqslant N,\ |P_n(x)-P_N(x)|\leq 1$$

Or, P_n-P_N est une fonction polynômiale, et une fonction polynômiale bornée sur $\mathbb{R}$ est constante. On en déduite que $P_n-P_N=c_n$ où c_n est une constante réelle ; puis, la fonction $x\mapsto c_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers $f-P_N$. Donc $f-P_N$ est constante : f est polynômiale.

Limite uniforme sur tous les compacts de $\mathbb{R}$ — Soit f une fonction continue quelconque. D'après le théorème de Weierstrass, pour tout n entier naturel non nul il existe P_n une fonction polynômiale sur $[-n,n]$ telle que

$$\sup_{-n\leq x\leq n}|P_n(x)-f(x)|\leq 1/n$$

Maintenant, soit K un compact de $\mathbb{R}$; K est fermé borné de sorte qu'il est contenu dans $[-n,n]$ pour n assez grand, et la suite P_n converge vers f uniformément sur K.

Conclusion : pour toute fonction continue f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, il existe une suite de fonctions polynômiales qui converge uniformément sur tout compact vers f.

Correction de l'exercice 127. Ecrivons $P=(p_{ij})$. La condition ${}^tPP=I_n$ impose l'orthogonalité des colonnes ; si par l'absurde une même ligne contient deux coefficients non nuls (disons $p_{ki}>0$ et $p_{kj}>0$ avec $i\neq j$) alors on a, vue la positivité des coefficients

$$\sum_k p_{ki}p_{kj}>0,$$

ce qui contredit l'orthogonalité des colonnes de P. Le même raisonnement appliqué à ${}^tP$ assure qu'il n'y a qu'au plus un coefficient non nul dans chaque colonne. Finalement, puisque P est inversible, chaque ligne et chaque colonne contient exactement un coefficient non nul ; et puisque P est orthogonale, les coefficients non nuls sont des matrices de permutations P_σ où $\sigma\in\mathcal{S}_n$.

Correction de l'exercice 128. Le fait que π soit irrationnel assure que la suite $u_n=\frac{1}{n\sin n}$ est bien définie pour tout $n\geqslant 1$. D'après l'inégalité des accroissements finis (ou bien l'inégalité de la moyenne appliquée à la dérivée de sin), nous avons

$$\forall x\in\mathbb{R}, |\sin x|\leq\inf_{k\in\mathbb{Z}}|x-k\pi|.$$

Posons, pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$\{x\}=x-\mathrm{E}(x+1/2).$$

Il s'agit là de la distance (signée) au plus proche entier ; on pourra en effet vérifier que

$$|\{x\}|=\inf_{k\in\mathbb{Z}}|x-k|.$$

Par ailleurs, $x\mapsto\{x\}$ est à valeurs dans $[-1/2,1/2[$ donc si on se donne $N\geqslant 2$ un entier, d'après le principe des tiroirs il existe $n_1\in\{1,\dots N\}$ et $n_2\in\{2N+1,\dots 3N\}$ tels que

$$\left|\left\{\frac{n_2}{\pi}\right\}-\left\{\frac{n_1}{\pi}\right\}\right|\leq\frac{1}{N-1},$$

de sorte que $\left|\left\{\frac{n_2-n_1}{\pi}\right\}\right| \leq \frac{1}{N-1}$, et d'après la première inégalité

$$|\sin(n_2-n_1)| \leq \pi\left|\left\{\frac{n_2-n_1}{\pi}\right\}\right| \leq \frac{\pi}{N-1} \leq \frac{\pi}{n_2-n_1}.$$

On en déduit que

$$|u_{n_2-n_1}| \geqslant \frac{N-1}{\pi(n_2-n_1)} \geqslant \frac{N-1}{3N\pi} \to \frac{1}{3\pi},$$

avec $n_2-n_1 > N$; donc si u_n converge alors elle est de signe constant à partir d'un certain rang. Ceci est absurde puisque comme $\pi > 1$, $\sin n$ ne peut pas être de signe constant.

Remarque. En fait, on peut montrer que la suite u_n n'est même pas bornée.

Correction de l'exercice 129. Le reste R de $P = (\cos\theta + (\sin\theta)X)^n$ dans la division euclidienne par X^2+1 est de degré < 2 ; il est donc complètement déterminé par ses valeurs en deux points, disons en i et en $-i$ (les racines complexes de X^2+1). Un calcul direct donne

$$\begin{aligned} R(i) &= (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \\ R(-i) &= (\cos\theta - i\sin\theta)^n = \cos n\theta - i\sin n\theta. \end{aligned}$$

Conclusion : $R(X) = \cos n\theta + (\sin n\theta)X$.

Correction de l'exercice 131. Une condition suffisante est que P soit un polynôme impair : dans ce cas

$${}^tP(A) = P\left(\left({}^tA\right)\right) = P(-A) = -P(A),$$

de sorte que $P(A)$ est encore antisymétrique, pour toute A antisymétrique.

Voyons qu'il s'agit d'une condition suffisante. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ nous devons avoir $P(At)$ antisymétrique, où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Un rapide calcul montre que $A^p = (-1)^{p/2} I_2$ si p est pair et $(-1)^{(p-1)/2} A$ si p est impair. Si donc P_0 (resp. P_1) est la partie paire[17] (resp. la partie impaire) de P nous avons

$$P(At) = \begin{pmatrix} P_0(t) & P_1(t) \\ -P_1(t) & P_0(t) \end{pmatrix}.$$

La condition $P(At)$ antisymétrique impose $P_0(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, d'où $P_0 = 0$ ($\mathbb{R}$ est bien un corps, infini), ce qui signifie que P a une partie paire nulle : il est impair.

Interprétation à l'aide des nombres complexes La matrice A précédemment introduite peut encore être vue comme l'image de i par le morphisme de $\mathbb{R}$-algèbres

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{C} &\to \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ z &\mapsto \begin{pmatrix} \mathfrak{Re}(z) & \mathfrak{Im}(z) \\ -\mathfrak{Im}(z) & \mathfrak{Re}(z) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

17. On rappelle que P_0 et P_1 sont donnés par les formules

$$\begin{aligned} P_0(X) &= \frac{P(X)+P(-X)}{2} \\ P_1(X) &= \frac{P(X)-P(-X)}{2}. \end{aligned}$$

Imposer $P(At)$ antisymétrique pour tout $t \in \mathbb{R}$, c'est imposer $P(it)$ imaginaire pour tout $t \in \mathbb{R}$, soit encore $P(i\mathbb{R}) \subset i\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 132. La fonction $x \mapsto e^x$ (resp. $x \mapsto n - x$) est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur $\mathbb{R}$. Les calculs de la valeur en 0 et de la limite en $+\infty$ pour ces deux fonctions donne l'existence et l'unicité de u_n, qui est de plus strictement positive. Par ailleurs

$$e^{u_{n+1}} = n + 1 - x > n - x = e^{u_n},$$

donc u_n est croissante et admet donc une limite ℓ, finie ou infinie. Si par l'absurde ℓ était finie, on aurait par contuité

$$e^{\ell} = \lim_{n\to+\infty} (n - \ell),$$

ce qui est clairement absurde (la limite à droite est infinie). On en déduit que $u_n \to +\infty$. De plus, comme $e^{\ln n} = n > n - u_n$, nous avons que $u_n < \ln n$ pour tout n ; en particulier, $u_n/n \to 0$, et de $e^{u_n} = n - u_n$ on tire en passant au log :

$$u_n = \ln(n - u_n) = \ln n + \ln\left(1 - \frac{u_n}{n}\right) = \ln n + o(1).$$

Remplaçant u_n par $\ln n + o(1)$ (procédé de « bootstrap »), on en tire

$$\begin{aligned} u_n = \ln(n - \ln n + o(1)) &= \ln n + \ln\left(1 - \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \ln n - \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Remarque. Poussant un cran plus loin, on peut encore écrire

$$\begin{aligned} u_n &= \ln\left(n - \ln n + \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \ln n + \ln\left(1 - \frac{\ln n}{n} + \frac{\ln n}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= \ln n - \frac{\ln n}{n} + \frac{\ln n}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 134. La fonction f_n à intégrer est continue sur $[0, 1[$. Au voisinage de 1, un développement limité donne

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \sim \frac{\pi}{2}(1 - x),$$

tandis que $1 - x^n = (1 - x)\left(1 + x + \cdots + x^{n-1}\right)$, donc

$$\lim_{x\to1} f_n(x) = n,$$

de sorte que f_n se prolonge par n en 1 ; elle est bien intégrable sur le compact $[0, 1]$ et I_n est bien définie. Voyons que $I_n \to +\infty$; posons pour tout $\epsilon > 0$

$$I_n(\epsilon) = \int_0^{1-\epsilon} \frac{1 - x^n}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)} \mathrm{d}x.$$

Alors f_n converge simplement vers la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$ sur le segment $[0, 1 - \epsilon]$; de plus les f_n sont dominées par f qui est intégrable, donc

$$I_n(\epsilon) \to \int_0^{1-\epsilon} \frac{\mathrm{d}x}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}.$$

Par ailleurs, les f_n étant positives nous avons $I_n \geq I_n(\epsilon)$, et f n'est pas intégrable sur $[0,1]$ d'après le critère de Riemann :

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_0^{1-\epsilon} \frac{\mathrm{d}x}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)} = +\infty.$$

Il s'agit à présent d'encadrer I_n. Pour tout $x \in [0,1]$,

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \leq \frac{\pi}{2}(1-x)$$

(par concavité de la fonction cos sur $[0,1]$, par exemple) ; donc

$$I_n \geq \int_0^1 \frac{1-x^n}{\frac{\pi}{2}(1-x)}\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} x^k \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}H_n,$$

où H_n est la série harmonique. Un calcul classique (par exemple une comparaison série-intégrale) donne $H_n \sim \ln n$; on cherche un majorant du même ordre.

Soit donc $\alpha > 0$ quelconque, on cherche à montrer que pour n assez grand nous avons $I_n \leq (1+\alpha) H_n$. Il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in [\eta, 1]$,

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \geq \frac{\pi}{2}\frac{1-x}{1+\alpha/2},$$

de sorte que

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^\eta \frac{1-x^n}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}\mathrm{d}x + \int_\eta^1 \frac{1-x^n}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}\mathrm{d}x \\
&= I_n(\eta) + \int_\eta^1 \frac{1-x^n}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}\mathrm{d}x \\
&\leq I_n(\eta) + (1+\alpha/2)\frac{2}{\pi}\int_\eta^1 \sum_{k=0}^{n-1} x^k \mathrm{d}x \\
&\leq I_n(\eta) + (1+\alpha/2) H_n.
\end{aligned}$$

Comme $I_n(\eta)$ tend vers une limite finie d'après ce qui précède, et comme $H_n \to +\infty$, à partir d'un certain rang nous avons

$$I_n(\eta) \leq \frac{\alpha}{2}H_n,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Correction de l'exercice 135. Déjà, $\mathcal{S}_n$ est un espace de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$ qui convient, d'après le théorème spectral. Soit maintenant V un sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $\geq \frac{n(n+1)}{2}$ formé exclusivement de matrices diagonalisable. Alors, si T est le sous-espace des matrices triangulaires supérieures strictes, on a $V \cap T = \{0\}$ (une matrice nilpotente et diagonalisable est nulle). Par ailleurs

$$\dim_{\mathbb{R}} T = \frac{n(n-1)}{2},$$

donc $\dim V \oplus T \geq \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = n^2$; ceci assure que

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = V \oplus T$$

puis que $\dim V = \frac{n(n+1)}{2}$.